
متعة الرياضي
تأليف
و. و. سوير
ترجمه
دكتور عطية عبدالسلام عاشور
دكتور ادوارد ميخائيل ابراهيم
راجعه


مـجـلـة
** معرفتي **
www.ibtesama.com
منتديات مجلة الإبتسامة
الابتسامة

الألف كتاب (٢٩٨)



متعة الرياضي

تصدر هذه السلسلة

بمعاونة المجلس الأعلى للعلوم



الألف كتاب

متعة الرياضي

تأليف
و. و. سوير

ترجمه

الدكتور عطية عاشور
الدكتور إدوارد ميخائيل

راجعه

الدكتور محمد مرسي أحمد

الناشر
دار سعد مصر
للطباعة والنشر

هذه ترجمة كتاب :

Mathematician's Delight

By

W. W. Sawyre.

الجزء الأول

الطريق إلى الرياضيات

الباب الأول

الفزع من الرياضيات

« الخوف أعظم الشرور »
من الفلسفة الأبقراطية

إن الهدف الرئيسى لهذا الكتاب هو تبديد الخوف من الرياضيات إذ الرأى السائد عند الكثيرين أن الرياضيين سلالة من البشر خصها الله بقوى خارقة للطبيعة ، وهذا الرأى مع ما فيه من إطراء للرياضى الناجح يقف عقبة أمام من تضطره ظروف الحياة إلى تعلم الرياضة .

ويتملك كثيراً من الطلاب شعور بالعجز التام عن فهم الرياضيات ، ولكنهم مع ذلك يحاولون أن يتعلموا منها القدر الذى يكفى لخداع الممتحنين ، ومثلهم فى هذا مثل الرسول يطالب منه أن يعيد كلاما بلغة يجهلها تمام الجهل ، كل همه أن يؤدى الرسالة قبل أن تخونه الذاكرة فيقع فى أفحش الأخطاء .

ومثل هذه الدراسة مضيعة للوقت ، فالرياضة أداة لا فائدة من الاستحواذ عليها إذا لم يكن الغرض من ذلك استخدامها . ولعل

الأفضل فى هذه الحالة صرف الوقت والجهد فى تمرينات الرياضة البدنية ففيها على الأقل فائدة لصحة الأجسام .

ثم إنه من أكبر العيوب أن يقف الإنسان جبانا خائراً أمام مجال من مجالات الحياة . والمثل الأعلى للصحة العقلية أن يكون الإنسان معداً لمواجهة مشكلات الحياة أياً كان نوعها لا أن يسلم قدميه للريح محولا نظره بعيداً عن مواطن الصعوبات .

ويتساءل المرء لِم هذا الشعور بالخوف من الرياضيات ؟ أمرد ذلك إلى طبيعة العلم ذاته ؟ أم مرده إلى أن الرياضيين يختلفون عن سائر البشر ؟ أم مرده إلى عيب فى الطريقة التى نتعلم بها هذا العلم ؟

ويكاد يكون من المحقق أن السبب لا يرجع إلى طبيعة الموضوع ذاته ، وأكبر دليل على ذلك أن الناس فى معاملاتهم اليومية يفكرون بطريقة هى فى أساسها ذات الطريقة الرياضية ولكنهم لا يدركون ذلك ، ويهلعون لو أن أحداً أشار عليهم بدراسة شىء من الرياضة ، والأمثلة على هذا كثيرة وسنوردها فى مكان آخر من هذا الكتاب .

ولقد أصبح الخوف من الرياضة من التقاليد التى ورثناها عن تلك الأيام التى لم يكن المعلم فيها يعرف إلا القليل عن الطبيعة

البشرية وبالتالى لم يكن يعرف شيئاً البتة عن طبيعة الرياضة ذاتها وما كان يلقنه هو شيء زائف ليس من الرياضة فى شيء .

التقليد الأعمى :

يكاد يكون لكل شيء ، ما يمكن أن نسميه ظلا أو محاكاة أو تقليداً لهذا الشيء ، فأغلب الظن أنك تستطيع أن تعلم الطفل الأبكم الأصم كيف يلعب البيانو ، وكلما أخطأ فى الإيقاع ولمح وجه مدرسه العابس ، أعاد محاولته مرة أخرى ، ولكنه لا يدرك معنى لما يقوم به ، ولا هو يدرك أيضاً لم يكرس المرء الساعات الطويلة لمثل هذه التدريبات العجيبة فهو يتعلم تقليداً للموسيقى ، وينظر إلى البيانو بذلك الخوف الذى ينظر به أغلب التلاميذ إلى الرياضة .

وما يقال عن الموسيقى يمكن قوله أيضاً عن غيرها من الموضوعات ، فالتاريخ التقليدى بملوكه وتاريخ وقائعه يمكن أن يتعلمه الإنسان دون أن يعى الدوافع وراء ذلك كله ، والتقليد فى الأدب يتمثل فيما يكتب من تعليقات لا حصر لها على كلام شكسبير مما يعصف بكل ملكة لتذوق أدب شكسبير ، ولنضرب لذلك مثلا : طالبان من طلبة الحقوق أخذ أولهما يحفظ عن ظهر قلب ما لا حصر له من النصوص ، أما الثانى فتخيل نفسه فلاحاً

له زوجة وعيال وأخذ يربط كل شيء بهذه الأسرة . فإذا كان عليه أن يعد وصية فهو لا ينسى أن يوفر لزوجته الضمان الكافى فى هذه الوصية ، فالأول يعيش فى عالم من الكلمات التى تكاد أن تكون بلا معنى والآخر يعيش فى عالم الواقع الملموس .

وخطر تعلمك الشيء دون أن تعيه يتمثل فى سخافة قول الطفل « البطن يحوى المعدة والأمعاء وهى أ ، هـ ، ى ، و ، ه » ما هى يا ترى الصورة التى رسمها الطفل فى ذهنه عندما قال بهذا ؟ هل تصور حروفاً معدنية كبيرة فى الأمعاء ؟ أم هو لم يرسم لذلك صورة ما ؟ ولعله قد سمع من معلمه كثيراً من العبارات التى لا تعنى شيئاً فلم ير فى قوله إن الأمعاء هى أ ، هـ ، ى ، و ، ه أى غموض .

وكثير من أسئلة الامتحانات فيها من الأخطاء الرياضية ما يعد فى سخافة المثل السابق والسبب هو نفس السبب : الكلمات التى لا توحى بصورة معينة ، وعدم التفكير الواقعى .

وهذا الخطر لا معدى عنه فى كل تعلم دون وعى كالببغاء ، فالطفل الأصم يلعب البيانو ولا يدرك ما يقع فيه من خطأ ، والتعلم الواقعى يجعل السخافة غير ممكنة ، وهذا أقل ما فيه من منافع ، وأهم من ذلك أنه يوفر الجهد الذى لا طائل تحته ويشعر بالأمان والثقة الذهنية ، وإنه لمن الأيسر أن تتعلم الشيء الحقيقى تعلماً صحيحاً من أن تتعلم التقليد تعليماً خاطئاً ، فضلا عن أن تعلم

الموضوع الحقيق فيه تشويق ولذة . وطالما كنت تشعر بالملل من تعلم موضوع ما فكن على يقين من أنك لا تلجه من بابه الصحيح ، وجميع الكشوف والأعمال العظيمة إنما جاءت على أيدى أناس أحبوا عملهم وهؤلاء الناس هم من البشر الطبيعيين ولم يكونوا ذوى قدرات خارقة ، فهذا هو إديسون وجد نفسه مضطراً لإجراء التجارب بذات الطريقة التى يعبث بها باقى أقرانه بالدراجات البخارية أو أجهزة اللاسلكى .

وهذا واضح بالنسبة إلى كبار العلماء أو كبار المهندسين أو المكتشفين ، وهو صحيح أيضاً بالنسبة لباقى الموضوعات .

ولكى تجيد أمراً ما يجب أن تبذل مجهوداً . يستوى الأمر فى ذلك بالنسبة للعبة كرة القدم أو لنظرية النسبية . ولكن يجب ألا يكون ذلك المجهود مملا أو مهيناً . وواجب المعلم الأول أن يجعل موضوعه شائقاً . والحق أن الطفل الذى يترك المدرسة فى العاشرة ، دون أن يعى من التفاصيل أكثر من روعة الموسيقى ولذة القراءة ، وحب الاستكشاف ، لخير من الشاب الذى يترك الجامعة فى الثانية والعشرين من عمره بعد أن يكون قد برم بجميع المعلومات الجافة فعزف عن البحث فى هذه المجالات التى تبدو ولا حياة فيها ، ويجب أن نقدم لكل موضوع بما يبين الفائدة

المرجوة من دراسته ، كما يجب أن نمهد لكل خطوة نخطوها فيه بما يشوق إليها ويجعلها تستحق الدرس والبحث .

ويكاد يكون من المحقق أن سوء التدريس هو السبب الأول فى كراهية الموضوعات ووصفها بأنها عالية أو صعبة الفهم . إن الأطفال بطبيعتهم يتوقون إلى تعلم الأشياء وإلى أداء الأعمال ، ومهمة المعلم لا أن يبعث الحياة فيهم فالحياة موجودة تنتظر المجال لتنشط وإنما مهمته أن يحافظ على هذه الحيوية وأن يوجهها .

ويسير التعليم فى الغالب الأعم ، مع الأسف ، على فلسفة أن يتعلم الكبار الأعمال الجامدة التى لا حياة فيها وأن على الأطفال أن يعودوا أنفسهم على هذه الأعمال الجامدة ، ونتيجة كل هذا أن يشب المتعلمون على كراهية جميع أنواع التعليم وألوان الثقافة العالية ، ولهم العذر فى ذلك .

والحق أن عدداً كبيراً من المشتغلين بمهنة التعليم ثائرون على هذا الجمود فى طريقة التدريس ، وقد استخدمت طرق ممتازة للتدريس سمعها الناس عن طريق الإذاعة . هذه الطرق الممتازة كان لها صدى فى كثير من أنحاء البلاد فطبقت وطورت بمجهودات فردية ، ومن ثم فما جاء فى هذا الكتاب من آراء لا ننفرد فيه بالأصالة وإنما هو تعبير لما أحس به كثيرون غيرنا .

وسأحاول فى فصول هذا الكتاب أن أبين مفهوم الرياضة

وكيف يفكر الرياضيون ، ومتى يمكن استخدام الرياضة ، ولا يتسع مجال هذا الكتاب لأى تفصيل بل سنكتفى بالإجمال ، وعلى القارىء الذى يرغب فى دراسة أى موضوع أن يرجع إلى ما كتب عنه فى الكتب الدراسية ، ولكن هذه الكتب محشوة بالمعلومات التى لا يظهر الهدف فيها واضحاً ، وليس مما ينفع أن نثقل ذاكرة القارىء بمثل هذه المعلومات المعدومة الهدف . فإننا لو فعلنا لكنا كمن يضع فى يده مطرقة هى من ضخامة الكتلة بحيث لا يمكنه رفعها . فالرياضة مجموعة من الأدوات ، وقبل دراسة كل واحدة من هذه الأدوات تفصيلا عليك أن تتعرف على الغرض من كل منها ، كيف تستخدم ومتى تستخدم وفيم تستخدم .

الباب الثانى

الهندسة ــ علم الأثاث والجدران

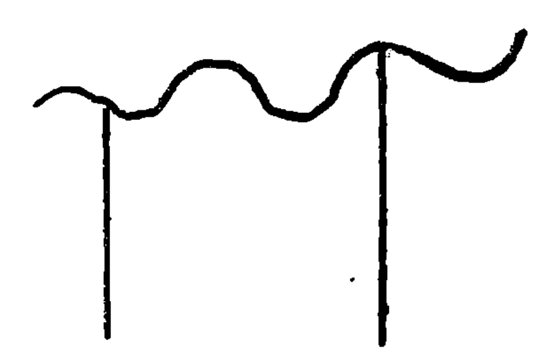
« وهكذا انكب الدكتور على عمله بنشاط متجدد ، انكب على إقليدس واللغة اللاتينية وعلى القواعد اللغوية والكسور . وتمكن بما أوتى من ذاكرة أن يفهم قواعد اللغة ، وكذلك الكسور لم تكن بالغة الصعوبة ، ولكن إقليدس كان محاولة بالغة الصعوبة . لم يستطع أن يعرف الغرض من الهندسة على الإطلاق . أخذ يسير سيراً لا بأس به إلى أن وصل لنهاية الكتاب الأول ، ولكن عندما أتى إلى نظريات متوازى الأضلاع كما اعتدنا تسميتها ، (لعن الله أجدادها !) عندما أتى إليها سقط صريعاً . لقد استمر مساء بأكمله صابراً يحاول مع إحدى هذه النظريات إلى أن اتجه ا ب نحو حـ ى وتبادلا الأيدى وأخذا يرقصان ويدوران فى رأسه الثائرة . جاء وقت النوم ولكن أنى له الراحة ! من الذى يستطيع النوم وهذا المتوازى الأضلاع الطويل السيء الأخلاق ا هـ يقف بين أغطية السرير ويصيح بصوت عال يكفى لإبعاد النوم عن المنزل ، إنه لم يحدث قطعاً من قبل ، ولن يكون فى المستقبل مساوياً للمربع السمين الضاحك حـ ل ! »

هنرى كنجسلى ، جيوفرى هاملين

فى الباب السابق ذكرنا أن الناس فى حياتهم اليومية يستخدمون نفس الطرق الجدليـة التى يستخدمها الرياضيون ولـكنهم لا يشعرون بذلك .

فمثلا ، كثير من الناس الذين سيقفون مشدوهين إذا قلت لهم « اشرح لى من فضلك التصميم الهندسى للمستطيل » لن يجدوا أية صعوبة على الإطلاق إذا أنت قلت « من فضلك قل لى عن طريقة جيدة لعمل نضد » . المستطيل يعنى الشكل المرسوم فيما يلى :

وان يستطيع أحد أن يصل إلى شىء بالنسبة للنضد إلا إذا فهم جيداً ماهية هذا الشكل . افرض مثلا أن لديك نضداً شكلها كالآتى :



فإن جميع الصحون وأوانى الشاى وأوعية اللبن الموضوعة

عليها ستنزلق أسفل المنخفضات أو تقع ، ويكون النضد فى مجمله غير مناسب وغير عملى . ويجمع الناس الذين يقومون بصنع النضد على أنه يجب أن تكون ذات سطح مستوٍ لا منحنٍ . وحتى إذا كان السطح الأعلى مستوياً فقد لا يكون أفقياً ، قد تبدو النضد بالهيئة وإذا كان السطح الأعلى مصنوعا بطريقة صحيحة فإن الأرجل قد تبدو غريبة مثل أو فى مثل هذه الحالات سيعمل وزن الجزء الأعلى من النضد على كسر المفاصل ، ولتجنب ذلك تصنع الأرجل عادة رأسية وتوجد النضد على الأرض على الهيئة .

وأى شخص يفهم شكل النضد يعرف ما هو المستطيل . ستجد الكثير عن المستطيلات فى كتب الهندسة لأن هذا الشكل ذو أهمية بالغة فى الحياة الواقعية ، وذلك بالرغم من أن الكتب الأقدم ليس فيها إشارة عن السبب الذى من أجله ندرس المستطيلات .

وحرفة أخرى تستخدم المستطيلات هى حرفة البناء . الطوبة العادية لها مستطيل من أعلى ومن أسفل ، ومن كل من الجانبين وفى النهايتين . لماذا ؟ من السهل تخمين الإجابة . يجب وضع الطوب بحيث تكون أحرفه رأسية وإلا فإنه ينزلق . (وحتى عند بناء الحوائط من الحجر غير المستوى ، كما هو الحال بالنسبة

الحوائط بوركشير الجافة نحاول أن نبنى بطبقات مستوية) . وذلك حتى يأخذ الطوب مكانه بين خطين أفقيين . ولكن لايزال فى الإمكان مع ذلك أن توجد أشكال غريبة للنهايتين .

ولكن هذا يشبه ألعاب الأطفال أكثر مما يشبه الحائط : إن البناء المسكين سينفق نصف حياته فى البحث عن الطوب المناسب . نحن نرغب فى أن يكون لجميع الطوب نفس الشكل وهذا يمكن القيام به بطرق متعددة : ////// أو ((( ))))))) . وهذه ستجعل نهاية الحائط غير منتظمة . وإذا تقابل حائطان ستوجد فراغات يجب ملؤها . بأخذ الشكل المعتاد للطوبة نتجنب جميع هذه التعقيدات .

لن يجد إنسان صعوبة فى هذا الكلام . لماذا إذن لا يحب الناس الهندسة ؟

أولا لأنها فى حكم السر الغامض بالنسبة لهم ، فهم لا يعرفون (ولم يعرفهم أحد) مدى التصاقها بحياتهم اليومية .

وثانياً لأنه يفترض فى الرياضيين الكمال . لا يوجد فى كتاب الهندسة شيء عن أشكال هي «مثلثات تقريبية» أو أشكال « تكاد»

تكون مستطيلات ، بينما من المألوف أن يكون النضد أو الباب منحرفا قليلا عن أن يكون مستطيلا . هذا الكمال يجعل الناس يحجمون . يمكنك أن تحاول مرات عديدة صنع نضد ، وكل محاولة ستكون تحسيناً لما قبلها . فأنت تتعلم بسيرك فى العملية . إذا أنت أصررت على « الكمال الرياضى » فمن السهل أن تغلق هذا الطريق الواسع للتقدم ، طريق التجربة والخطأ . إذا تذكرت مدى قرب الهندسة من حرفة النجارة ، ستتجنب هذا الخطأ . إذا كانت لديك مسألة تحيرك ، فإن أول شيء يجب عمله هو أن تحاول تجارب قليلة . وعندما تجد طريقة تبدو أنها ستؤدى إلى نتيجة فقد تتمكن من العثور على تبرير « مضبوط » ، « كامل » لطريقتك : قد يكون فى إمكانك إثبات صحة هذه الطريقة ولكن هذا الكمال يأتى فى النهاية ، التجربة تأتى أولا .

لقد كان علماء الرياضة الأوائل رجالا عمليين ، نجارين وبنائين. وقد تركت هذه الحقيقة علامات على الكلمات التى استخدمت بالذات فى الموضوع . ماهو « الخط المستقيم » ، «Straight line». إذا نظرت فى القاموس إلى كلمة « Straight » ستجد أنها تأتى من الكلمة التى تناظر « Stretched » أى الممتد ، فى اللغة الانجليزية القديمة ، بينما « line » هى نفس كلمة « linen » أى تيل « linen thread » أى خيط التيل . وعلى ذلك فالخط المستقيم هو

خيط تيل ممتد، وذلك كما يدرك تماماً أى شخص يزرع البطاطس أو يبنى الطوب فوق بعضه البعض .

وإقليدس يعبر عن هذه المسألة بطريقة مختلفة شيئاً ما . فهو يقول إن الخط المستقيم هو أقصر بعد بين نقطتين . ولكن كيف يمكنك إيجاد هذا البعد الأقصر ؟ إذا أخذت شريط قياس من إحدى نقطتين إلى الأخرى ثم جذبت إحدى النهايتين بأقصى ما يمكنك ، وذلك لكى يكون جزء الشريط المحصور بين النقطتين أقل ما يمكن ، فإنك ستكون قد وجدت أقصر بعد بين النقطتين . وسيكون الشريط ممتداً بنفس الطريقة التى يمتد بها خيط البناء أو خيط زارع الحدائق . (البستانى) .

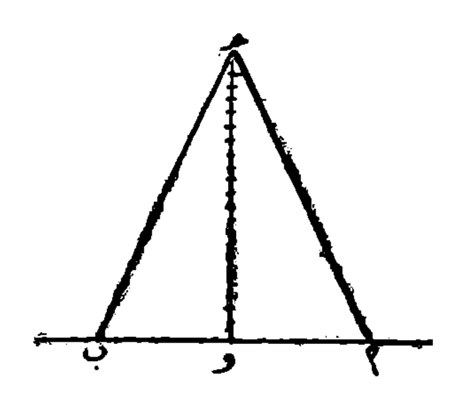
إذا طلب منك تعريف شىء ما ، اسأل نفسك « كيف يمكننى أن أصنع مثل هذا الشىء فى الحياة المألوفة » ؟

فمثلا قد يطلب منك تعريف « الزاوية القائمة » . الزاوية القائمة (إذا لم تكن تعرف) هى الشكل الناتج عندما يتقابل خطان على هيئة الحرف « L » ، أى |__ . ومن ناحية أخرى /__ ، __/ ليست زاويا قائمة .

كيف يمكنك عمل زاوية قائمة ؟ افرض أنك ترغب فى قطع صفحة من الورق إلى نصفين متناسقين تماماً . ماذا تفعل فى هذه الحالة ؟ إنك تثنى الورقة بحيث تنطبق حروفها ثم تقطع عند خط

الانثناء الذى تعلم أنه يكون « قائماً » ، على الحرف . إذا أنت ثنيت الورقة بدون أى انتباه فإنك لا تحصل على الزاوية القائمة ، وإنما على شيء يشبه ______ : يترك جزء أكبر من اللازم من الورقة على أحد الجانبين . نحن نرى الآن الصفة الخاصة بالزاوية القائمة . كلا جانبي خط الانثناء يبدوان بنفس الشكل . إذا كانت هناك بقع من الحبر على أحد الجانبين فيجب أن نحصل على انعكاسات لهذه البقع على الجانب الآخر عند بسط الورقة . خط الانثناء يعمل كمرآه . وانعكاس حرف الورقة ، إذا كان لدينا زاوية قائمة ، يقع على الحرف الموجود فى الجانب الآخر من خط الثنى .

يمكنك تجربة ذلك بمسطرة أو عصا مشى . يمكن إمساك العصا فى وضع بحيث يبدو انعكاسها كامتداد لها : يمكنك النظر للعصا وانعكاسها تماماً كما لو كنت تنظر لماسورة بندقية . فى هذه الحالة تكون العصا فى حالة زاوية قائمة مع المرآة .



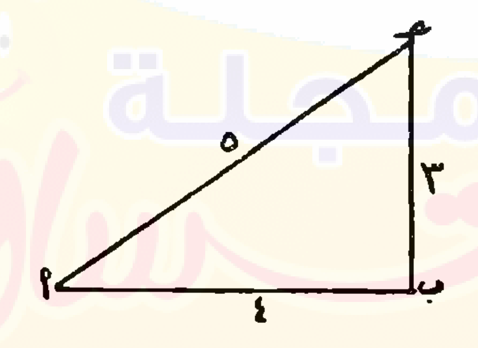
ولكن افرض أنك تخطط ملعباً لكرة القدم ، وتريد أن تحصل على زاوية قائمة . لا يمكنك أن تثنى خط التماس على نفسه وتلاحظ أين يقع خط الانثناء ! ولكن هذه الفكرة عن المرآة تبين لنا طريق التغلب على هذه الصعوبة .

افرض أن و هى نقطة خط التماس حيث ترغب فى رسم خط عمودى على خط التماس و ا . نحن نعلم أنه إذا أخذت مرآة ، و حـ ، وضعاً صحيحاً فإنها تعكس النقطة ا بحيث تظهر عند النقطة ب التى تقع أيضاً على خط التماس إذا ثنيت الورقة عند الخط و حـ ستقع ا على ب . والخط و ا سينطبق على و ب ، والخط احـ على ب حـ بعد هذا الثنى .

وهذا يشير إلى طريق لإيجاد الخط و حـ . إذا بدأنا من و وقسنا بعدين متساويين على جانبى و ، و ا ، و ب ، نكون قد حصلنا على ا وانعكاسها ب . حيث إن ب حـ هو انعكاس احـ فيجب أن يكونا متساويين فى الطول . خذ حبلا طوله مناسب واربط إحدى نهايتيه عند ا ، ثم سر محركا النهاية الأخرى على الأرض بحيث يكون الحبل مشدوداً . جميع مواضع هذه النهاية ستكون على بعد مساو لبعد الحبل عن ا . فك الحبل الآن من ا واربطه فى ب وكرر العملية وارسم مساراً آخر لنهاية الحبل الحرة على الأرض . ونقطة تقاطع هذين المسارين ستكون على

بعدين متساويين عن كل من ا ، ب . وهذا يكفى لتعيين النقطة حـ . نثبت وتداً فى هذا الموضع ثم نمد خطاً من حـ إلى و ثم يطلى باللون الأبيض بطوله .

يمكنك أن ترى بسهولة كيف أن الطريقة السابقة التى تناسب تخطيط ملاعب كرة القدم ، يمكن ترجمتها إلى طريقة لرسم الزوايا القائمة على الورق باستخدام المسطرة والبرجل (فرجار) . ولكن توجد طريقة أخرى مدهشة للغاية ، وهى تستخدم فعلا فى تخطيط ملاعب الكرة .



إذا أخذت ثلاثة قضبان أطوالها ٣ ، ٤ ، ٥ ياردة ووضعتها بحيث تتقابل نهاياتها كما هو مبين فى الشكل فإنك ستجد أن الزاوية ب هى زاوية قائمة . لم يكن أحد ليظن بأن النتيجة ستكون كذلك . ويبدو أن هذه النتيجة اكتشفت منذ حوالى خمسة آلاف عام ، وكان الاكتشاف بالصدفة . والذى وصل إلى هذا الاكتشاف ليس معروفاً ، ولكن الشىء المؤكد هو أن المكتشف كانت له علاقة ما بحرفة البناء ، عاملا كان أو معمارياً . وطريقة الحصول

على الزاوية القائمة هذه استخدمت كجزء من فن المعمار : ولم يسأل الناس عن سبب هذه الخاصية وكانوا فى ذلك مثل سيدة المنزل لا تسأل عن سبب استخدام الخميرة . كان معلوماً أنك تحصل على نتائج طيبة إذا استخدمت هذه الطريقة ، وقد استخدمها المصريون فى بناء المعابد والأهرام بنجاح كبير .

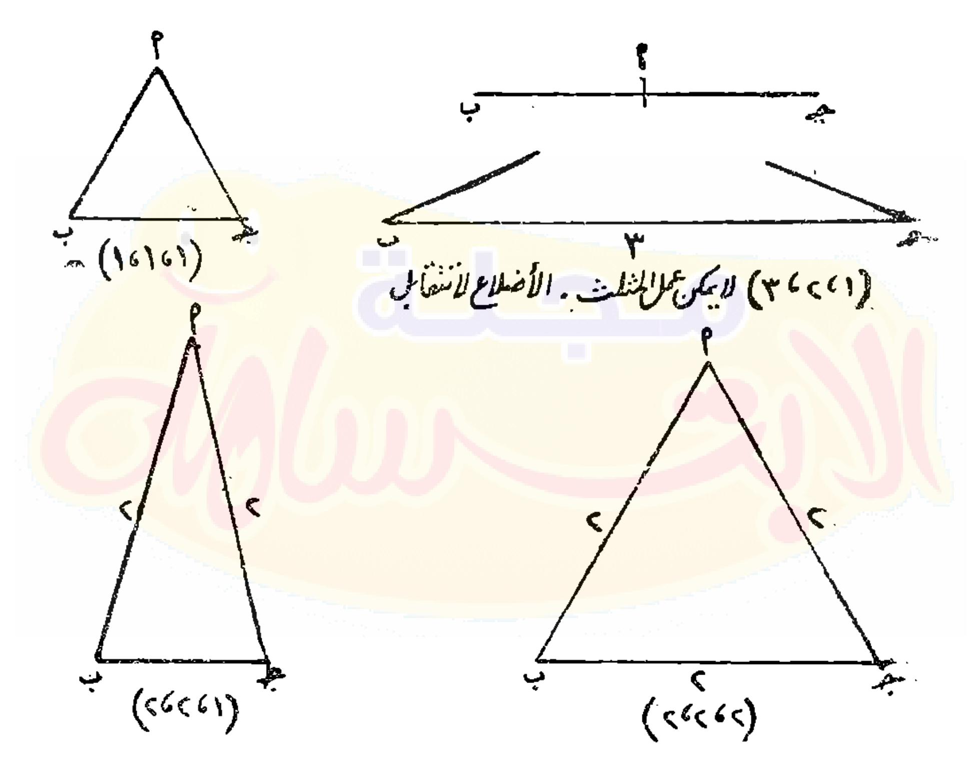
وليس من المعلوم إلى أى مدى أقلق العلماء المصريون أنفسهم فى محاولة إيجاد تفسير لهذه الحقيقة ، ولكن من المؤكد أن الرحالة الإغريق الذين زاروا مصر قد وجدوا أن هذه مسألة عويصة وغامضة للغاية . أما العمال المصريون فلم يجدوا فى هذه المسألة أى شىء يثير الدهشة . وإذا سألهم الإغريق عنها ففى الغالب أن إجابتهم كانت « فليرحمكم الله ، لقد كانت هذه هى الطريقة التى تجرى بها هذه العملية دائماً . هل لديكم طريقة بديلة لإجرائها ؟

ويعود الإغريق ويتعجبون . لماذا ؟ » لماذا ٣ ، ٤ ، ٥ ؟ لماذا لا تؤدى الأعداد ٧ ، ٨ ، ٩ لنفس النتيجة ؟ وعلى أية حال ماذا يحدث لو أننا جربنا الأعداد ٧ ، ٨ ، ٩ أو أى ثلاثة أعداد أخرى ؟

من الطبيعى إذن أن تبدأ بأعداد صغيرة نسبياً وتحاول عمل مثلثات ، مثلا (١ ، ١ ، ١) ، (١ ، ١ ، ٢) ، (١ ، ١ ، ٣) ، (١ ، ٢ ، ٢) ، (٢ ، ٢ ، ٢) ... إلخ لم يكن لدى الإغريق اللعبة

المعروفة باسم الميكانو . فبالميكانو يمكن عمل مثل هذه المثلثات بسرعة . ماهو شكل هذه المثلثات ؟

بمجرد أن تبدأ فى التجربة بهذه الطريقة ، ستأخذ فى اكتشاف بعض الأمور . ستجد أنه فى بعض الأحيان يستحيل عمل المثلث على الإطلاق ، مثلا (١ ، ١ ، ٣) ، (١ ، ١ ، ٤) وهكذا .



والواقع أنه كلما كان أحد الأضلاع (مثلا ٣) أكبر من الضلعين الآخرين (١ ، ١) فإنه يستحيل تكوين المثلث .

وستلاحظ أنك إذا ضاعفت أضلاع مثلث فإن ذلك لا يغير من شكله (٢ ، ٢ ، ٢) يبدو بنفس شكل (١ ، ١ ، ١) .

أيضاً المثلث (١ ، ٢ ، ٢) شكله متزن ومقبول : إذا أنت أدرت المثلث بحيث تتبادل ب ، حـ موضع كل منهما فإن المثلث سيظل بنفس الشكل .

وكلما أجريت تجارب أكثر برسم أو تكوين المثلثات ، كثرت الأمور التى تلاحظها عنها . ولن تكون جميع هذه الاكتشافات جديدة فى الواقع . فمثلا رأينا فيما سبق أنه فى أى مثلث يجب أن يكون الضلع ا ب مضافا إلى الضلع ا حـ أكبر من الضلع ب حـ . ولكن ذلك ليس بالأمر الجديد . نحن نعلم أن الخط المستقيم ب حـ هو أقصر بعد بين ب ، حـ ، وعلى ذلك فمن الطبيعى أن المسافة تكون أطول إذا ذهبنا من ب إلى حـ عن طريق ا وهى المسافة التى تساوى مجموع ا ب ، ا حـ . وعلى ذلك فهذه النتيجة بالذات كان يمكن الحصول عليها بالمنطق : أنها تنتج من حقيقة أن الخط المستقيم هو أقصر مسار بين نقطتين .

وبالتالى يمكننا القيام بأمرين فى دراستنا لأشكال الأشياء :

(١) يمكننا اكتشاف عدد كبير من الحقائق .

(٢) يمكننا ترتيبها بنظام يبين أى الحقائق ينتج من الآخر .

والواقع أن الإغريق قاموا بهذين الأمرين ، وكتب إقليدس فى عام ٣٠٠ قبل الميلاد كتابه المشهور عن الهندسة ، واضعاً جميع

الحقائق المعروفة على صورة نظام . ستجد فى هذا الكتاب لماذا تعطى الأطوال (٣ ، ٤ ، ٥) مثلثا قائم الزاوية ، كما برهن أيضاً على أن مثلثات أخرى ، مثل (٥ ، ١٢ ، ١٣) أو (٢٤ ، ٢٥ ، ٧) أو (٣٣ ، ٥٦ ، ٦٥) لها نفس الصفة .

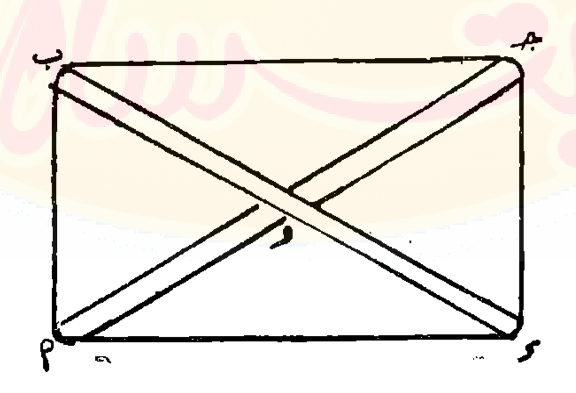
ولكن ذلك كله استغرق وقتا . لقد بنى الهرم الأكبر عام ٣٩٠٠ قبل الميلاد ، بقواعد مبنية على التجربة العملية : لم يظهر نظام إقليدس إلا بعد ٣٦٠٠ سنة من ذلك التاريخ . إننا نكون غير عادلين لو انتظرنا أن يبدأ الأطفال دراسة الهندسة بالصورة التى أعطاها إقليدس . لا يمكن أن نتخطى ٣٦٠٠ عاما من المجهود البشرى بهذه البساطة : إن أفضل طريقة لدارسة الهندسة هى تتبع الطريق الذى سار فيه الجنس البشرى : نفعل الأشياء ، نصنع الأشياء ، نلاحظ الأشياء ، ننظم الأشياء ، وعندئذ فقط نحاول تعليل هذه الأشياء .

وعلى الخصوص لا تحاول أن تكون متعجلا للأمور . فالرياضيات ، كما ترى ، لا تتقدم بسرعة . الأمر المهم هو أن تكون متأكداً من أنك تعلم ما تتكلم عنه : أن تكون لديك صورة واضحة فى عقلك . استمر فى تقليب الأمور فى عقلك إلى أن تحصل على صورة حية وواقعية لكل فكرة . وبمجرد أن تتعلم كيف تفكر فى صور واضحة ، سيكون تقدمك سريعا وبدون

توتر . ولكن الشيء القاتل هو أن تتقدم وتترك العدو — الفكرة المرتبكة — وراءك . إن أفضل من ذلك أن تبدأ ثانية من جداول الضرب .

بعض التجارب المتصلة بعلم الهندسة

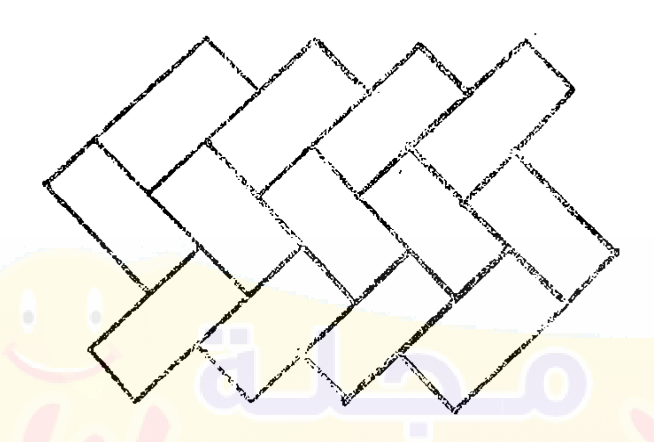
١ — صبي معه قطعة خشب ا حـ طولها أربعة أقدام . يرغب في وصلها بقطعة أخرى كما هو مبين في الشكل وذلك بحيث إنه إذا مر حبل ا ب حـ ى حول المحيط الخارجي فإنه يكون على هيئة مستطيل ؟



ما هو الطول الذي يجب أن تكون عليه القطعة ب ى ، وعند أية نقطة (و) يجب وصل القطعتين معا ؟ هل يجب أن تأخذ الزاوية المحصورة بين القطعتين قيمة معينة ؟

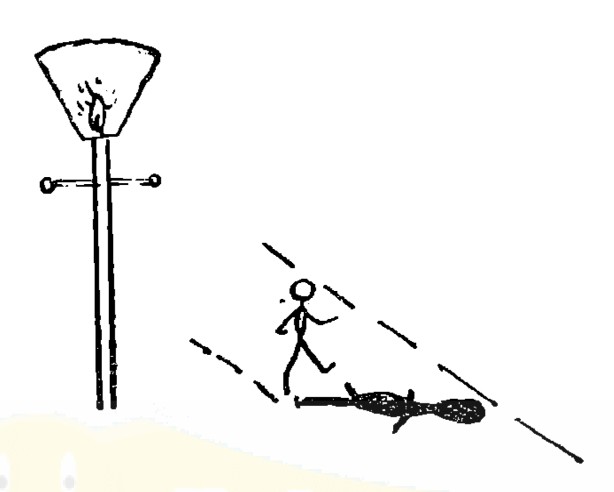
٢ — قطعة مسطحة من الأرض مطلوب تغطيتها بالبلاط . جميع

البلاط يجب أن يكون له نفس الشكل والأبعاد ولكن ليس من المهم أن يوجد حرف غير مستو على المحيط الخارجي . أعط أكبر عدد يمكنك من التصميمات للقيام بذلك . أحد الأمثلة مبين في الشكل المعطى فيما يلي :



٣ — ارتفاع مصباح إضاءة شارع عن الأرض ١٢ قدما . أخذ طفل طوله ٣ أقدام يسلي نفسه بأن يسير بحيث يقع ظل رأسه دائماً على خطوط مرسومة بالطباشير على الأرض .
ما هي الكيفية التي يسير بها الطفل إذا كان الخط المرسوم بالطباشير هو : (١) مستقيم (٢) دائرة (٣) مربع ؟
ما هي القاعدة التي تربط بين شكل وأبعاد مسار الطفل وبين الخط المرسوم بالطباشير ؟ (ملاحظة — لا تشتبك مع أحد حول الإجابة عن هذا السؤال قبل أن تكون قد أجريت التجربة بالفعل . وإحدى الطرق الملائمة لإجراء مثل هذه

التجربة هو أخذ مصباح منزلى بدلا من مصباح الشارع وقلما لتمثيل الطفل . سيسجل القلم مساره فى أثناء حركته) .

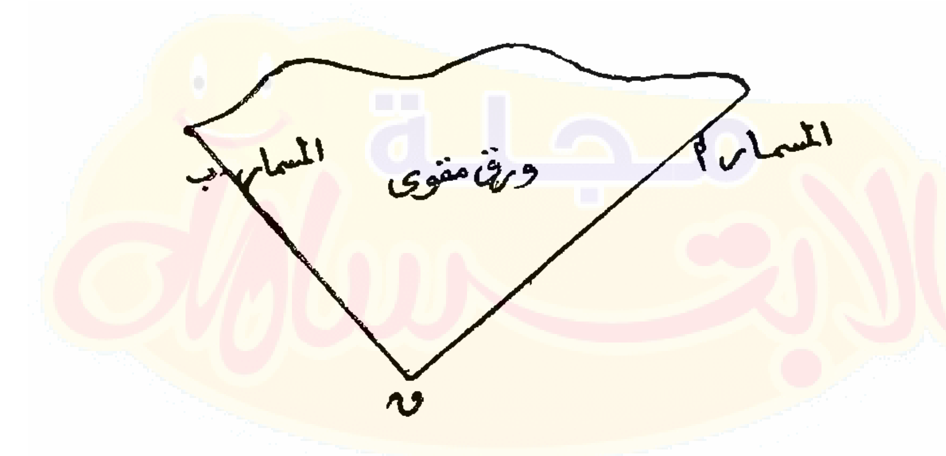


٤ — فى السؤال السابق ما هو التغيير الذى يحدث إذا أتى الضوء من الشمس بدلا من المصباح ؟

٥ — رجل طوله ست أقدام يقف على بعد ١٠ أقدام من عمود نور . المصباح يقع على ارتفاع ١٢ قدما عن سطح الأرض . ما طول ظل الرجل ؟

٦ — يمكن لجوال أن يرى قمتى كنيستين . الأولى تقع أمامه مباشرة والثانية إلى يساره مباشرة . ومع الجوال خريطة مبين بها مكان الكنيستين بنقطتين ، ولكن ليست لديه أية فكرة على الإطلاق عن الاتجاه الذى يواجهه ، هل هو الشمال أو الجنوب أو أية نقطة أخرى على البوصلة . ماذا يمكنه أن يعرف عن مكانه

على الخريطة ؟ (طريقة مقترحة. ثبت مسمارين فى قطعة مستوية من الخشب. افرض أن هذين المسمارين يمثلان الكنيستين . خذ قطعة من الورق المقوى ، أحد أركانها زاوية قائمة ، واجعل ضلعى الزاوية يمران بالمسمارين كل على مسمار كما هو مبين فى الشكل فى هذه الحالة تكون ق هى الموضع المحتمل لوقوف الجوال . وذلك لأنه إذا نظر فى الاتجاه ق ا ستكون ب على يساره مباشرة . حدد موضع ق على الخشب . اجعل الورقة



تنزلق على لوحة الخشب وحدد مواضع أخرى ممكنة بنفس الطريقة . جميع هذه النقط تقع على منحنى معين . ما هو هذا المنحنى ؟

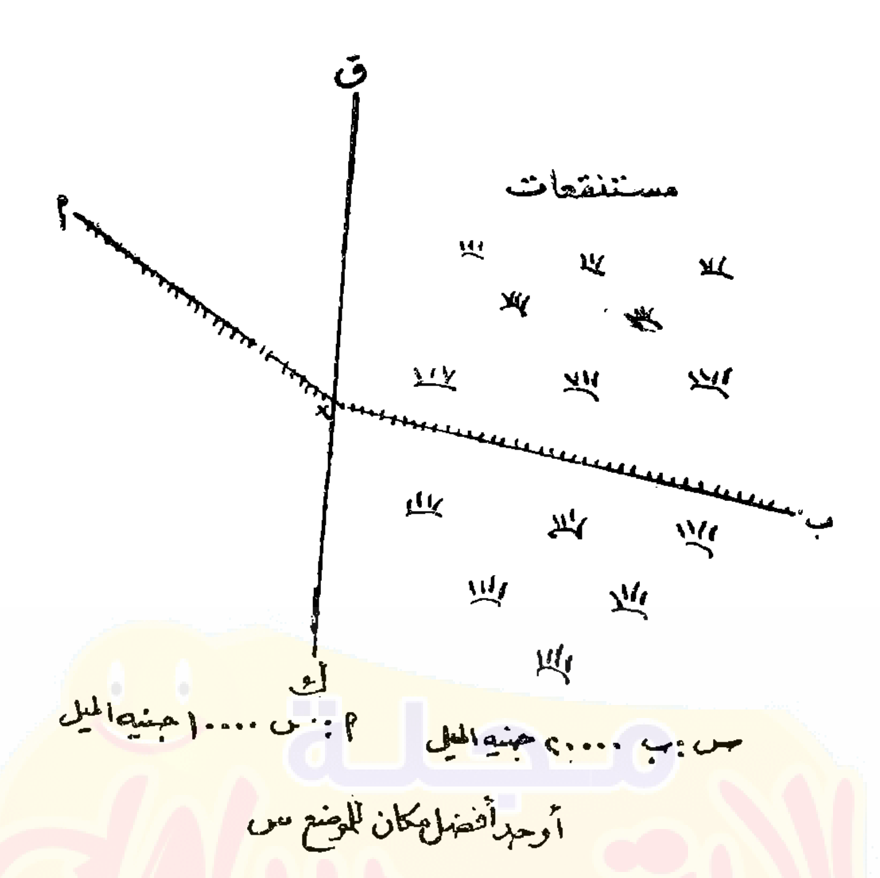
٧ـ فى مجال رماية مصغر طوله ٢٥ ياردة ، مطلوب تصميم هدف متحرك يمثل سيارة طولها ٢٠ قدما وارتفاعها ١٥ قدما ، وتبعد مسافة نصف ميل وتتحرك بسرعة ٢٠ ميلا فى الساعة. المفروض

أن الرامى سيكون فى موضع يمكنه من رؤية جانب واحد من السيارة. ماهى الأبعاد التى يجب تمثيل السيارة بها ، وماهى السرعة التى يجب أن تتحرك بها على الستار ؟

٨ - يرغب عنكبوت فى الزحف من أحد أركان طوبة ا إلى الركن المقابل ب وذلك بأقصر طريق ممكن . ماهو المسار الذى يجب أن يتبعه؟ بالطبع يزحف العنكبوت على سطح الطوبة ـ لا يمكنه أن يخترق الطوبة .

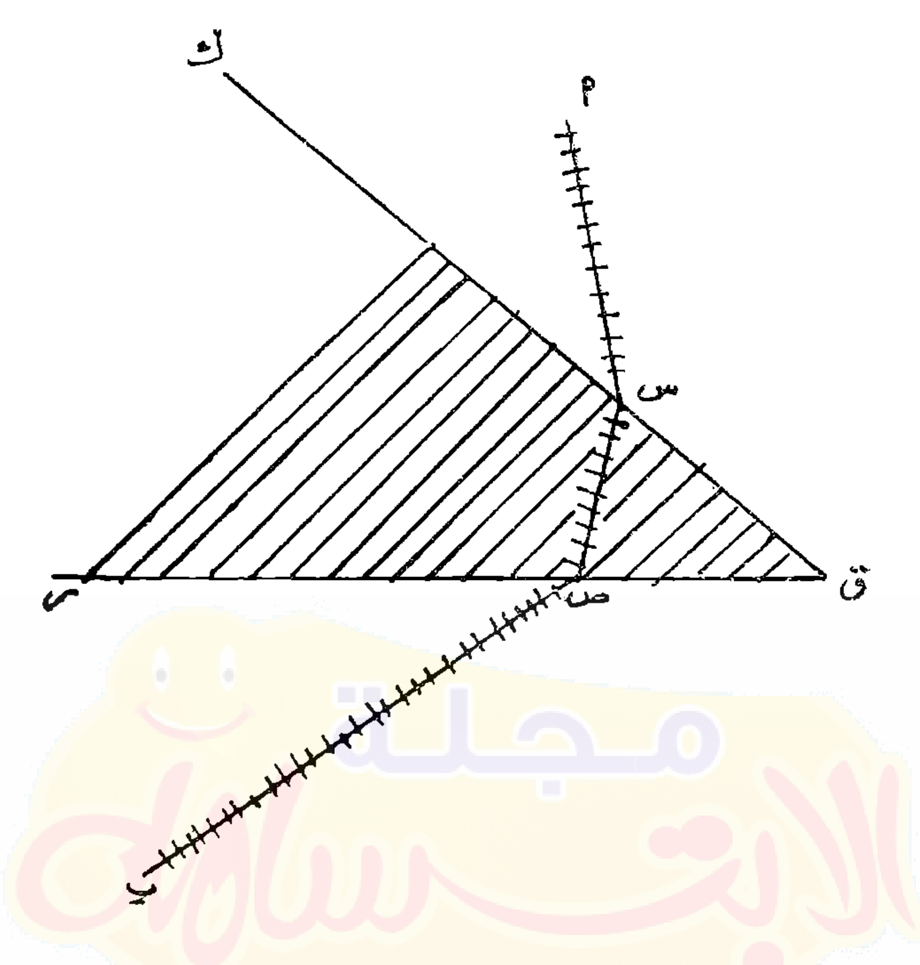
(المواد المطلوبة : عدد من الطوب بأشكال مختلفة ، قطعة حبل يمكن أن تمتد بين ا ، ب ، من المفيد الاستعاضة عن قوالب الطوب بورق مقوى وذلك بثنية. بعد الوصول على أقصر بعد وتحديده بعلامات على الورق المقوى ، يمكن جعل الورق مستويا ثانية ، ويجب ملاحظة الصورة التى يأخذها المسار عندئذ) .

٩ - احصل على نموذج لكرة أرضية . مد خيطاً بين مكانين عليها خذ مذكرة بالأماكن التى يمر عليها الخيط . عين هذه الأماكن على خريطة للعالم بأطلس (إسقاط مركاتور) . لاحظ كيف يختلف المنحنى الذى يمر بها عن مستقيم مرسوم على الخريطة ، هذه الحقيقة مهمة بالنسبة للبحارة والطيارين الذين يطيرون مسافة طويلة (ملاحظة الدائرة العظمى) .



١٠ — مطلوب مد خط سكة حديدية بين مدينتين م ، ب . الأرض على يمين الخط ق ك بها مستنقعات ؛ ونتيجة لذلك فإن تكاليف مد ميل من القضبان فى هذه المنطقة هى ضعف مثيلتها على يمين ق ك . ارسم عدداً من الطرق الممكنة للسكة الحديد من م إلى ب . احسب تكاليف الإنشاء ، وأوجد بأقرب ما يمكنك الطريق الذى يجعل التكاليف أقل ما يمكن . (انظر الشكل الموجود فى صفحة ٢٠) .

(ملاحظة : لا يتوقع منك أن تجيب على هذا السؤال بإجراء



الحسابات فقط . ارسم خطة لنفسك ، ضع المدينتين ا ، ب حيثما ترغب وقس أية خطوط تريد قياسها ، افرض أن الميل من خطوط السكك الحديدية على يسار ق ك يتكلف فى الواقع ١٠٠٠٠ جنيه نحن نريد الإجابة بأية طريقة ـ بالحساب أو بالتجربة ، أو بالاثنين معاً . لا تهتم بما قاله إقليدس عام ٣٠٠ قبل الميلاد)

١١ ــ هذا السؤال شبيه بالسؤال السابق فيما عدا أن صورة العائق مختلفة . مطلوب بناء سكة حديدية تربط بين ا ، ب ولكن

يوجد بينهما مساحة من الأرض الصعبة كق ر. عين أفضل طريق للسكة الحديدية . (تنشأ مسائل من هذا النوع فى الحياة العملية وذلك عندما تقع أراضى جبلية بين المدينتين . فى هذه الحالة تكون التكاليف الزائدة ناتجة عن الحاجة لحفر الأنفاق)

انظر الشكل صفحة ٣٧) .



الباب الثالث

طبيعة التدليل

«كلما كثرت مشاهداتى للرجال والأولاد زدت اعتقاداً بأن طريقتى فى الدراسة هى الطريقة المألوفة الطبيعية وأن المدرسين يهدمونها ويستبدلون بها شيئا يكاد يكون (مجرد الحفظ)»

جون بيرى عام ١٩٠١.

فى إحدى المناسبات؛ علق برناردشو، تعليقاً قاسياً قال فيه :

«إن الناس الذين يعرفون عمل شيء ما، يقومون بعمله بينما الذين لا يعرفون عمل شيء ما تضطرهم ظروف الحياة إلى تكسب عيشهم بتعليم غيرهم»

والواقع أن التدريس هو أشق بكثير من مجرد «عمل شيء ما». إذ فى مقابل كل مائة رجل بارعين فى لعبة كرة القدم ستجد رجلا واحداً يمكنه أن يعلمك كيف تلعب هذه اللعبة جيداً. فأنت تجد مئات من الأطفال النابغين ومئات من الأطفال الخاملين، ولكن نادراً ما تجد طفلا كان خاملا فى البداية أصبح نابغة نتيجة لمساعدة مدرس. وهذا هو محك الاختبار للمدرس. وأغلب المدرسين

الآمناء مع أنفسهم تحملهم الأمانة على الاعتراف بأنه فى الأغلب الأعم، سيتقدم الفصل بنفس الدرجة إذا لم يوجد المدرس على الإطلاق، سيبقى التلاميذ النابغون نابغين والخاملون خاملين.

ترى هل معنى هذا أنه يوجد فى الواقع عنصران من الرجال. أولئك الذين يولدون لينجحوا وأولئك الذين يولدون ليفشلوا؟ وترى هل « للرجال العظماء » طريقة خاصة للتفكير لا يتمتع بها الناس العاديون ولا يمكنهم فهمها؟.

توجد بالطبع فروق معينة فى الأجسام والعقول التى يرثها الأطفال عن والديهم، وتوجد حالات نقص عقلى حيث لا تقوم غدد مهمة بوظائفها، وفى هذه الحالات يجب أن يحجز الأطفال فى بيوت خاصة. وقد يكون الحال أن الغدد، أو أية عوامل أخرى، تضع حداً لقدرات كل فرد منا، ومن ثمة فإن من العبث محاولة الحصول على مهارة أعلى من هذا الحد. ومهما يكن من شيء فمن المؤكد أن ما من واحد فى كل ألف من الناس يستغل الغدد أو القدرات العقلية التى يمتلكها استغلالا تاماً، أو يعمل لاستغلال قدراته بما يصل به إلى الحد الطبيعى الذى يؤهله له ذكاؤه. ومن المؤكد أننا لا نستطيع أن نعزو إلى تأثير الغدد أن شخصاً يكون لامعاً وذا أفكار إيجابية خارج حجرة الدراسة بينما يكون خاملا فى كل ما يتعلق بالمدرسة، والحق أن السر فى هذا

ينبغي أن يلتمس فى أشياء أخرى خارج هذا النطاق .

على أنه مما ينبغي أن نوليه اهتمامنا فى هذا المقام أن نبحث عما يقوم به « الرجال العظماء » أو رجال الأعمال الناجحون فى أعمالهم، ويعجز الآخرون عن القيام به . وأن نقف على الصفات الضرورية التى تمكن للإنسان من أن يجيد لعبة ما، أو أن يكون رساماً أو موسيقياً أو مهندساً أو فلاحاً، أو عالماً من علماء الرياضة ؟ وهل فى الإمكان تطوير هذه الصفات بتمرينات مناسبة؟ وهل من الممكن للشخص العادى إذا هو صمم على أن يحصل على هذه الصفات ؟ الحق أنه يوم يستطيع المدرسون الإجابة عن هذه الأسئلة ، ويوم يستطيع كل فرد أن يستغل قدراته إلى أقصى حدودها ، يكون الوقت قد حان عندئذ للكلام عن الفوارق الموروثة فى الذكاء . ولكن ذلك لن يأتى أوانه إلا بعد عدة قرون .

إن لدينا فى الوقت الحاضر عدداً من الكتب يمكن أن نتعلم منها ونستفيد، ومن الخير لنا أن نمضى الساعات فى البحث فى مكتبة كبيرة عن مثل هذه الكتب بدلا من قراءة مئات الكتب التى ألفها مؤلفون من الدرجة الثانية . إنه لأمر بعيد الاحتمال للغاية أن تهبط عليك أو على أفكار مبتكرة فعلا لم يسبقنا الغير إليها . ذلك أن الناس فيما يبدو ينتمون إلى فصائل معينة . فإذا وجدت نفسك مثلا تميل إلى أى موضوع ، فإن الاحتمال كبير جداً فى أنك ستجد

شخصاً ما آخر قد اهتم بالموضوع نفسه . وستجد وجهات نظرك مدروسة فى كتاباته أو كتاباتها . وبالتالى فإنه يمكنك البدء فى دراسة الموضوع من حيث انتهى من قاموا بدراسته قبلك .

وفى كثير من الأحيان قد يجد الإنسان فى قراءته كتبا كتبت عن موضوعات أخرى غير موضوع بحثه مايعينه على دراسة أو تدريس موضوعه . ومن قبيل ذلك ماوقع لى حين وقعت على كتاب فى إحدى المكتبات عنوانه «السباحة للجميع» فقد استبان لى فى قراءته أنه يتبع منهجاً فى البحث يمكن تطبيقه على أغلب الموضوعات الأخرى. فى هذا الكتاب يفسر المؤلف أولا قواعد السباحة . ثم يشرح الفرق بين الحركات التى نحتاج إليها فى الماء وبين الحركات التى نقوم بها لا شعوريا نتيجة لحياتنا على اليابسة وبعد ذلك يعطى المؤلف سلسلة من التجارب والتمرينات تكفى لإقناعنا بصدق ملاحظات المؤلف ، وتوفر للقارىء لا معرفة هذه الحقائق فحسب وإنما أيضا الشعور العميق بصدقها ، بل والقدرة على تطبيقها تطبيقاً صحيحاً لا شعورياً .

إن الكتاب الذين يكتبون عن لعبة التنس (كرة المضرب) يسوقون ملاحظات يمكن أن يتخذمنها قياساً يطبق على غيرها . فهم يقولون إنك يجب ألا تبدأ بمحاولة ضرب الكرة فى نطاق الملعب وإنما يجب أن تبدأ بضرب الكرة بشدة ، وبأسلوب جيد

وبالتدريج ستجد أن الكرة ترتد بعد ضربها إلى الملعب . أما إذا بدأت بالقلق حول أين تذهب الكرة ، فإنك ستبقى لاعباً ضعيفاً على الدوام . وأغلب هذا الكلام صحيح بالنسبة للرياضيات . والأمر المهم هو أن تعلم كيف تصل إلى الهدف بنفسك وأن أى أخطاء تقع فيها يمكن تصحيحها فيما بعد . أما إذا بدأت بمحاولة أن تكون كاملا فإنك لن تصل إلى شيء . ذلك أن الطريق لبلوغ الكمال لا يتحقق إلا بالمحاولة والخطأ .

وهذا يذكرنى بكتاب عن الرسم قرأته من عدة سنوات مضت وللأسف أنى لا أذكر اسم المؤلف[1] . لقد حاول أن يعلم الرسم بطريقة تجعل قراءه يجلسون فى الدور العلوى للسيارة العامة ويسجلون على الورق التعبيرات المرتسمة على وجوه الناس . وينصح المؤلف بأن تستخدم فى ذلك الورق المهمل وألا تغير من رسم رسمته على الإطلاق . ألق به جانبا إذا ظهر أنه خطأ وابدأ ثانية . ولا تهتم بما إذا كانت الأشياء بشكلها الصحيح أم لا . ارسم باختصار ما تراه فعلا ، وعلى الخصوص الظلال . لا ترسم خطوطاً إلا إذا

---

(١) ربما الرسم للاطفال تأليف فرنون بليك
Drawing for Children by Vernon Blake وإحدى الملاحظات المقتبسة هى من كتاب كيفية الرسم من الطبيعة للمؤلفة ل . دوست

رأيتها قائمة فعلا . اعتبر رسومك الأولى مجرد تصوير بدائى ، ولاحظ ما تراه فعلا . وبالتدريج ستجد أن أشكال رسومك ستصبح أقرب تعبيراً عن الحياة ، ولكن حتى رسومك الأولى التى لم تكن النسب فيها صحيحة ستعبر عن شىء ما حقيقى وملموس وقد أعطى المؤلف رسوم بدائية للغاية لتوضيح هذه الحقيقة . وأنا لا أعلم أى شىء عن الرسم ولكنى إذا أردت أن أتعلمه فمن المؤكد أننى سأتعلم بهذه الطريقة .

وفى جميع الموضوعات يبدو أن هناك طريقة لمعالجتها بشكل مشجع ومثير للاهتمام . و «الرجال العظماء» هم فى الغالب الرجال الذين أثار اهتمامهم موضوع بالصدفة أو بالتجربة أو نتيجة لتأثير المدرسين الممتازين ووفقوا إلى طريق المعالجة الصحيح . إن الذى يجعلنا نعتقد بأن الأشخاص النابغين نوع أرقى من غيرهم هو الجهل بطريقة معالجة الموضوع . وكلما زادت دراستنا لطرق العظماء بدت هذه الطرق عادية .

وفى كثير من الأحيان تعطينا القصص غير المنشورة انطباعاً خاطئاً . توجد قصة عن نيوتن والتفاحة : رأى نيوتن تفاحة تسقط وتساءل عن سبب سقوطها — هكذا يقال لنا ومن غير المحتمل على الإطلاق أن يكون نيوتن قد فعل شيئاً مثل ذلك . فحتى يومنا هذا نحن لا نعلم سبب سقوط التفاحة . إن الأكثر احتمالا هو أن

نيوتن فكر كما يلى : ماذا يحدث لو أن التفاحة أسقطت من ارتفاع كبير جداً ؟ من الواضح أنها ستسقط أيضاً فى هذه الحالة مهما كان ارتفاعها عن سطح الأرض . إذا لم يكن الأمر كذلك فإنه سيوجد ارتفاع معين إذا وصلت إليه التفاحة فإننا نجد أنها لا تسقط. وهذا ممكن ولكنه بعيد الاحتمال . وعلى ذلك فيبدو من المحتمل أنه حتىَ لو وصلنا إلى القمر أو الشمس سنظل نشعر بجذب الأرض ولوَ أن هذا الجذب قد لا يكون بنفس شدته على الأرض . وربما يكون هذا الجذب هو الذى يجعل القمر يتحرك قريباً من الأرض، وهو نفسه الذى يجعل الأرض تدور حول الشمس ؟ وعلى أية حال هذه هى النتيجة التى توصل إليها نيوتن من التفاحة ، وهى أن كل قطعة من المادة فى الكون تؤثر بجذب على كل قطعة أخرى مهما كان بعدها عنها . إن أحداً لا يشك فى عظمة نيوتن ، ولكن ما من أحد كذلك يمكن أن يدعى أن الطريقة التى وصل بها نيوتن إلى هذه الحقيقة فيها شىء خارق يفوق طاقة البشر .

الدليل فى الرياضة

نتعلم من الرياضة كيف نحل الألغاز . وكل منا يعرف أن من السهل حل لغز إذا أعطينا جوابه . وليس هذا إلا اختباراً للذاكرة . يمكنك أن تدعى أنك رياضى إذا أنت بمفردك دون

مساعدة شعرت بأنك ستكون قادراً على حل لغز لم تدرسه ولم يدرسه غيرك من قبل . هذا هو اختبار القدرة على التدليل .

ماهي بالضبط قدرة التدليل؟وهل هي شيء مختلف عن قدرات العقل الأخرى ؟ هل هي شيء محدد ؟ أم شيء يمكن التمرين عليه وتنميته ؟ وما هي الكيفية التي نحصل بها على مثل هذه القدرة ؟

يبدو لأول وهلة أن التدليل الرياضي هو من نوع خاص . كما يبدو أنه لا يوجد له مكان في العلوم التجريبية ولا في الفنون الخلاقة .

بعض الموضوعات هي نتيجة التجارب العلمية أو التجربة اليومية . الكيمياء تبحث فيما يحدث عندما تسقط المعادن في السوائل ، أو عندما تخلط محتويات إناء بمحتويات إناء آخر . والميكانيكا تبحث في حركة الأجسام الصلبة . كما يسجل التاريخ أعمال الرجال . ودراسة اللغات تبحث في الكلمات التي تستخدمها الشعوب في أجزاء العالم المختلفة . ومن السهل أن نرى كيفية الحصول على المعلومات التي يشتمل عليها كتاب في الكيمياء أو الميكانيكا أو التاريخ أو اللغة الفرنسية .

ومن ناحية أخرى توجد الموضوعات الأخرى (التي يعشقها الأستاذ جود) والتي تختلف فيها آراء الناس، وهذه هي الموضوعات

التى لا تعتمد على البرهان على الإطلاق — وإنما تتمثل فيما تميل إليه ، فيما ترى أنه ينبغى عمله ، فى نوع الشخص الذى تعجب به ، فى الحزب الذى تعطيه صوتك . هذه هى أشياء تتحمل أنت بالذات مسئوليتها وهى تبين أى نوع من الأشخاص أنت . قد تكون مستعداً لأن تقاتل للمحافظة على نوع العالم الذى تعتقد أنه الأفضل : حقاً يجب عليك ذلك . ولكنك لا تغير أفكارك الأساسية عن الأشياء التى تتوقف إلى الوصول إليها نتيجة للمناقشة والبرهان . فإنما قد افترض أن الميكروبات تحلم بعالم لا يقاوم الجدرى ، ونحن لا نستطيع أن نثبت أن هذا العالم لم ينشأ لمصلحة الميكروبات ، وكل ما يمكننا عمله هو أن نستخدم كميات كبيرة من المواد المضادة للعدوى .

تبدو الرياضة موضوعاً غريباً ، فالأمر فيها ليس مسألة ذوق وإنما الأمر فيها لا يعدو الخطأ والصواب . فى هذا العلم ، أكثر من أى علم آخر ، توجد إجابة صحيحة وإجابة خطأ . ولكن من ناحية أخرى لا يبدو أن هذا العلم يختص بأى شىء محدد . فجزء كبير منه ومهم مثلا يختص بالجذر التربيعى للعدد —١ ، وهو شىء مارآه أو أحس به أو ذاقه إنسان ما على الإطلاق . ومع ذلك فليس هناك أدنى شك فيما يتصل بخواصه .

فى الأزمنة القديمة كان الفلاسفة يجدون من الصعب تفسير

قدرات الإنسان على التدليل وكان يصلون إلى نتائج غريبة . وإحدى هـذه النظريات كانت أننا قد عشنا فى دنيا أخرى قبل ولادتنا ، وأننا فى تلك الدنيا تعرفنا على قوانين الحساب والهندسة (ولا أدرى إلى أى مدى كانت مقررات الدراسة حينئذ) . وغرض التعليم فى دنيانا الحـالية هو مجرد إيقاظ ذاكرتنا واسترجاع هذه المعرفة .

يجب ألا نسخر من هـذه النظرية القديمة . فهى على الأقل توضح أن مكونات التعليم هى التعاون مع ما دخل عقل الطفل فعلا . والمدرس الجيد يستطيع فى معظم الأحيان أن يوضح أفكاره بمجرد أن يسأل فى الفصل بعض الأسئلة ، ويجعل التلاميذ يتحققون بوضوح مما يعرفونه فعلا وماهو مخزون داخل عقولهم.

والتفسير الذى أصبح فى متناولنا الآن ، والذى كان من الصعب على الفلاسفة القدماء التكهن به ، قد وضعه فى أيدينا علم الأحياء . ذلك أنه أصبح من المسلم به بصفة عامة أن الحياة قد وجدت على الأرض منذ الملايين من السنين ، وأننا نولد بغرائز اختبرت وتطورت خلال صراع طويل فى سبيل البقـاء . وبالإضافة إلى هذه الغرائز حصلنا على تدريب ، أعطى لنا على الخصوص فى السنوات الخمس الأولى من حياتنا . وهو مبنى على التقاليد التى يرجع بعضها إلى خبرة اكتسبت من آلاف السنين .

وهكذا فإننا عندما نبلغ سن الخامسة نصبح ، إن جاز هذا القول ، سلعة صناعية راقية ، وعلى العموم نبدأ بعد هذه السن نصبح واعين لقدرتنا على مجادلة الأمور لأنفسنا .

وعلى ذلك فإذا وجدنا فى أنفسنا رغبة قوية لعمل شىء معين ، أو لتصديق شىء معين ، فعلى أقل تقدير يمكن القول بأن هذه الرغبة فى الإنسان موجودة فى الإنسان إما لأنها ساعدته على البقاء ، وإما لأنها أثبتت قيمتها فى عصور من الصراع مع العالم الواقعى . ومن ثم فالحيوانات التى تبقى ، والأجناس التى تبقى هى الحيوانات والأجناس التى تفعل الشىء الصحيح . وعلى ذلك يجب علينا أن نتوقع أن المخ البشرى والعقل البشرى ، قد تكونا على العموم بحيث ينتجان التصرف الصحيح فى أى ظرف . ويجب ألا نتوقع منهما أن يكون تكوينهما بحيث تنتج الفكرة المنطقية الكاملة . ففى الواقع كثيراً ما نجد أشخاصاً يفعلون الشىء الصحيح وإن أخطأوا أسبابه ودوافعه . فالمتوحشون لا يعرفون أى شىء عن أسباب المرض ، ولكن إذا وجد مكان كمركز للعدوى فإنهم يقولون إن الذهاب إليه يجلب سوء الحظ ، إذ أن هذا المكان مسكون بروح شريرة .

لقد بينا فى الباب الثانى أن علم الهندسة مر فى الواقع بالمرحلة التى كان العامل فيها يعمل الشىء الصحيح دون أن تكون لديه

نظرية تشرح له سبب ذلك . والواقع أن الهندسة والحساب كلاهما مرتبطان بالحياة اليومية ؛ فالهندسة مرتبطة بصناعة البناء والحساب بدفع النقود . فإذا أنت أعطيت المحصل ثلاثة قروش ثمناً لتذكرتين قيمة كل منها قرشان فإنه لن يكون مستعداً للتصديق بأن القول إن ضعف الاثنين أربعة هو مجرد تعبير ابتدعته الجامعة . إنه يعتبرها حقيقة ثبتت ثبوتاً راسخاً من تجربة الحياة اليومية .

لقد وضح الآن أن الرياضة مثلها مثل الكيمياء ، هي شيء نتعلمه من خلال تجاربنا في العالم الواقعي . سيعترض بعض الناس بشدة على ذلك . سيقولون « نستطيع أن نتصور أن القصدير يسقط في حامض الكبريتيك دون أن يحدث شيئاً ، ولكن هل يمكنك أن تتصور أن اثنين واثنين يساويان خمسة » ؟

من المؤكد أنني لا يمكن أن أتخيل أن اثنين واثنين يساويان خمسة . إذا ادعى رجل أنه يستطيع أن يفعل المعجزات وأمكنه أن يجعل ضعف الاثنين يساوي خمسة فإني أعطيه الدرجة النهائية . وهذه المعجزة ستؤثر فيّ أكثر من أية معجزة أخرى .

ولكن ليس هذا هو بيت القصيد . المسألة هي لماذا لا يمكننا أن نتخيل أن ضعف الاثنين يساوي خمسة ؟ .

يوجد تفسيران محتملان : الأول ، أن لنا قدرة غامضة وهبت لنا فى حياة سالفة أو منحناها بآية طريقة أخرى . والثانى أننا لا يمكننا أن نتخيل ضعف الاثنين مساوياً خمسة لأنه فى خلال تاريخ الإنسان كله كان ضعف الاثنين يساوى أربعة ولم توجد حاجة لكى تتخيل عقولنا أيه صورة أخرى لهذه المسألة .

التفسير الأول لا يتفق مع تجربة معظم المدرسين ، صحيح أنه قد يوجد أشخاص يتمتعون بقدرة كاملة على التدليل بدرجة تؤيد وجهة النظر هذه ، ومن ثم يكون مما يثير الاهتمام معرفة المدارس والكليات التى تلقنوا العلم فيها . ولكن مع ذلك فإن الإنسان يجد فى أعمال الرياضيين العظماء أدلة على أخطاء سخيفة وعلى عدم فهم وعلى محاولات شاقة لتبين الطريق نحو الحقيقة .

وربما تكون الضربة القاضية لنظرية « القدرة الغامضة » هى حقيقة أن علماء الرياضة الحاليين يرفضون ما كان يعتقد به الرياضيون القدماء اعتقاداً راسخاً . لقد كانت العادة فى وقت من الأوقات إذا أردنا تأكيد صحة مبدأ ما أن نقول بأن صدق هذا المبدأ هو كصدق أن مجموع زوايا المثلث يساوى زاويتين قائمتين . فإذا كان أينشتين على حق فإن مجموع زوايا المثلث لا يساوى زاويتين قائمتين . لقد حطمت كل من نظرية النسبية ، وميكانيكية

الكم معتقدات ظلت مؤكدة مدة طويلة ، وأجبرتنا هاتان النظريتان على أن نعيد النظر فى أسس معتقداتنا .

إذا أنت تقبلت هندسة إقليدس لأنها تتفق مع ماتراه من أشكال الأشياء ، فإن افتراض أحد الأشخاص أن إقليدس قد يكون مخطئاً بآحاد قليلة من المليون من البوصة فى نواح معينة ، لا يكون من قبيل الإزعاج بلا مبرر. ذلك لأنه يتعذر عليك رؤية جزء من المليون من البوصة ، وهندسة أينشتين لا تفترق عن هندسة إقليدس إلا بآحاد من المليون ولكن إذا أنت اعتقدت أن إقليدس على حق مطلق فإنك تكون فى ورطة . والواقع أن إقليدس نفسه قال « إذا أنت قبلت أشياء معينة فلا بد أن تقبل أن مجموع زوايا المثلث يساوى قائمتين » .

ومن ناحية أخرى توجد ظواهر تثير الاهتمام للطريقة التى بنيت بها أفكار الإنسان خلال التجارب اليومية . وإحدى هذه الظواهر تتمثل فى الكلمات التى نستعملها . حاول أن تتخيل رجلا من أهل الكهف (أو أى شخص آخر كان هو أول من طور لغة) يحاول أن يقول لصديق له « الذى يقوله هذا الكاتب عن الجذر التربيعى لناقص واحد لا يتفق على الإطلاق مع فلسفتى » . ترى كيف سيستطيع أن يجعل صديقه يفهم ما يعنيه بكلمات مجردة مثل «فلسفة» ، «ناقص واحد» « يتفق » وما إلى ذلك ؟ كل طفل تقابله

هذه المشكلة وهو يتعلم الكلام . كيف يمكن للطفل أن يعرف معانى الكلمات فيما عدا أسماء الناس والأشياء التى يمكنه رؤيتها ؟

ومما يوضح الأمر أن نأخذ قاموساً ونبحث فيه عن مثل هذه الكلمات ويكاد المرء دائما يجد أن مثل هذه الكلمات المطلقة ، أسماء الأشياء التى لا يمكن رؤيتها ، تأتى من الكلمات الخاصة بأشياء أو أفعال واقعية . خذ مثلا كلمة يفهم understand فى كل من اللغتين الألمانية والإنجليزية نجد أن هذه الكلمة ترتبط بالكلمات « الوقوف تحت to stand under وفى اللغة الفرنسية الجملة « هل تفهم ؟ » هى Comprenez vous وهى تعنى

هل يمكنك أن تمسك بذلك ؟ وهى تشبه العبارة الإنجليزية Can yon grasp it وحتى يومنا هذا يقول الناس عبارات مثل «حاول أن تدخل ذلك فى رأسك Try to get it in your head

عند تعلم الكلام ، يكاد الطفل يتبع نفس الطريق . فهو يحفظ أسماء والديه وأسماء الأشياء الموجودة بالمنزل ، وهو أيضاً يحفظ الكلمات التى تصف مايشعر به ، «هل أنت جائع » ؟ ، «هل أنت متعب ؟ » هل أنت سعيد ؟ ، « لا تخف » ، « ألا يمكنك أن تتذكر ، « قل إنك آسف . »

كل فيلسوف ، كل أستاذ . كل معلم . . كلهم بدأوا بنفس هذه الطريقة . . بكلمات تصف الأشياء التى ترى والأشياء التى يشعر بها وجميع الأفكار المعقدة التى فكر فيها على مر الزمان تستند إلى هذا

الأساس كل كاتب أو خطيب أدخل كلمة جديدة كان عليه أن يشرح معناها بواسطة كلمات أخرى، كلمات يعرفها الناس فعلا ويفهمون معناها. من الممكن عمل رسم شكل ضخم يمثل اللغة الإنجليزية تكون فيه كل كلمة مستندة إلى مجموعات من كلمات أخرى هى الكلمات التى تفسرها. وفى أسفل سيكون لدينا كلمات لا تستند على شىء. وهذه ستكون الكلمات التى يمكن فهمها مباشرة من من تجاربنا - وهى ما نراه ومانشعر به وما نفعله.

فمثلا، الفلسفة هى ما يقوم به الفيلسوف. كلمة الفيلسوف تعنى «محب الحكمة». وعلينا أن نتعلم معنى «الحب» و «الحكمة» من حياتنا اليومية.

وما ينطبق على الفلسفة ويصح بالنسبة لها هو أيضاً صحيح بالنسبة للرياضة: تقع جذورها فى الخبرة العادية للحياة اليومية. إذا أمكنك أن تقتفى أثر الطريق الذى تطورت به الألفاظ الرياضية بالتدريج من الكلمات التى تستخدمها يوميا فإنك ستتمكن من فهم ماهية الرياضة.

النقطة الأساسية التى يجب استيعابها هى أن التدليل الرياضى لا يفترق عن قدرات العقل الأخرى، كما أن الرياضة غير منفصلة عن أمور الحياة الأخرى. على العكس تماما: الرياضة نمت من ظروف الحياة، كما أن التدليل نما من التجربة.

وثمة ظاهرة أخرى للطريقة التى صنعت بها عقولنا نجدها فى القانون المعروف جيداً لعلماء النفس ، «لا يوجد أى شيء فى الخيال لم يكن موجوداً من قبل فى الشعور» . مثلا حاول أن تتخيل لونا جديداً . ستجد أنك ببساطة تجمع تأثير الألوان التى رأيتها من قبل . أو حاول أن تتخيل الجنة ، أو دنيا مثالية . ستجد نفسك تجمع ذكريات أسعد أوقاتك ، أو تاركا جميع الأشياء التى أثارت غضبك . فى إحدى مدارس إسكتلندا ، كتب الأطفال (وكانوا يجلسون على مقاعد غير مريحة) مقالا عن «المدرسة المثالية» . بدأ تسعون فى المائة من التلاميذ مقالهم بأن ذكروا أنه فى المدارس المثالية توضع وسادات على المقاعد ، وبعد ذلك وصفوا كيف أن المدرسين يرتعدون خوفا من القواعد الصارمة التى يضعها التلاميذ .

التدليل والتصور

لقد بحثنا فيما قبل العبارة «ضعف الاثنين أربعة» ، وقلنا إننا لا يمكن أن نتصورها خلاف ذلك . هذه الحجة تبين بوضوح الارتباط بين التدليل والتصور ؛ فى الواقع ليس التدليل أكثر أو أقل من تجربة تجرى في التصور . فى أية قصة بوليسية جيدة ، يحاول المخبر أن يتصور بأقصى ما يمكنه من الوضوح هيكل جريمة

ويرى كيف تتفق أقوال كل من الشهود المختلفين مع الصورة العامة. ونتمكن من تتبع القصة والتدليل باستخدام مجرد تصورنا (سر مارى روجت لإدجار ألن بو ، The mystery of Marie Roget هى مثال جيد على استخدام التعليل التصورى فى الكشف عن غوامض جريمة من الحياة الواقعية). [1]

ليس من الضرورى على الإطلاق أن يبدأ التدليل بخطوات واضحة محددة . إذا أنت سمعت إشاعة تعنى أن صديقك أحمد متورط فى بعض الأعمال الكريهة ، فقد تقول ، أنا لا أصدق هذه القصة ، أحمد لا يمكن أن يفعل مثل هذا ، قد لا يكون فى إمكانك أن تذكر قصص أعمال بطولية قام بها أحمد ، أو أن تعطى أى دليل محدد على الإطلاق . شعورك هو مجرد أن أحمد شخص حسن السلوك ، ومع ذلك فهذا هو مثال جيد جداً على التدليل . وستتوقف صحة النتيجة التى توصلت إليها أو خطؤها على طول المدة التى عرفت أحمد فيها ، وعلى ما إذا كنت تعرفه جيداً . وستجد أن من الصعب جداً جعل الجمهور يشاركك ثقتك فى أحمد . فليس لديهم خبرتك

---

(١) انظر المذكرات والمقدمة فى كتاب دوروثى . ل . ساير قصص بوليسية قصيرة وعظيمة ، والغموض والرعب الجزء الأول (الناشر جولانز)

مع أحمد : وعلى ذلك لا يمكنهم أن يتصوروه كما تتصوره ، وبالتالى فإنهم يدللون بالنسبة له بطريقة مختلفة .

يقال إنه عندما أخبر المكتشفون الأوروبيون سكان المناطق الحارة بالشتاء فى نصف الكرة الشمالى ، وقالوا لهم إن الماء يصبح كالحجر، ويتمكن الناس من المشى عليه ، عندما أخبروهم بذلك قوبلوا بعدم تصديق مؤدب . كان الوطنيون ينظرون إلى أمواج البحر الدافئة وهى تمخر تحت أشجار النخيل ورفضوا أن يصدقوا وجود الثلج . كان ذلك بعيدا عن خبرتهم وإن تعودوا سماع قصص الرحالة .

يقع الناس غالبا فى أخطاء عندما يدللون بالنسبة لأشياء لم يروها قط . يتخيل الأطفال الملوك وعلى رءوسهم التيجان ، مع أن الأكثر احتمالا فى الحياة الفعلية هو أن يلبس الملوك غطاء عسكريا للرأس أو قبعة . قبل أن تصنع القاطرات الأولى ، كان الناس يرفضون تصديق أنها ستعمل . كانوا يظنون أن العجلات ستنزلق وأن القطار سيظل ساكنا . وقد ذهب شخص معين اسمه السيد بلنكنسوب بعيداً إلى حد اختراع قاطرة عجلاتها مزودة بمسامير للتغلب على هذه الصعوبة الخيالية تماما .

وإذا تنبأ شخص فى سنة ١٧٠٠ بما سيكون عليه العالم اليوم ، فمن المؤكد أنه كان سيعتبر مجنونا .

ومهما يكن من شيء فالتصور لا يعطى دائماً الجواب الصحيح . والحق أن فى إمكاننا أن ندلل تدليلا صحيحا على الأشياء التى لنا بها سابق خبرة أو التى تشبه بدرجة معقولة الأشياء التى نعرفها جيداً . على أنه إذا أدى بنا تدليلنا إلى نتيجة غير صحيحة ، فإن الخطأ يقع فى هذا التدليل ، ومن ثم يجب أن نراجع الصورة فى عقولنا ونتعلم أن نتصور الأشياء كما هى .

وحين نجد أنفسنا عاجزين عن التدليل (كما يحدث كثيراً عندما تقابل الإنسان مسألة فى الجبر مثلا) فإن السبب فى ذلك هو أن تصورنا لم يتحرك . فالإنسان لا يستطع البدء فى التدليل إلا عندما تتكون صورة واضحة للمشكلة فى خياله . ومن ثم فالتعليم السيئ هو التعليم الذى يعطى عدداً لا نهائياً من العلامات التى لا معنى لها ، والكلمات والقواعد دون أن يحرك الخيال .

الهدف الأساسى من هذا الكتاب ليس هو تفسير الطريقة التى يمكن أن تحل بها المسائل ، وإنما هدفه هو بيان ماهية المسائل الرياضية .

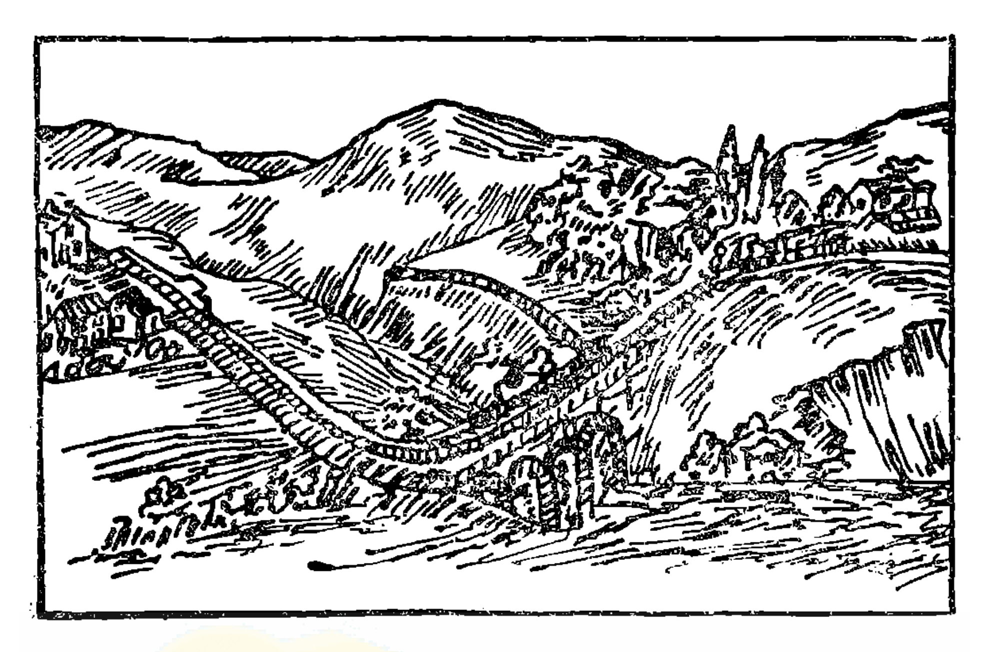
دعنا ندرس الآن مثالا للجدل أساسه أشياء مما يراها كل شخص، ويمكنه أن يتصورها تصوراً صحيحاً . محطتان للسكك الحديدية ا، ب متصلتان بخط حديدى فردى ونتيجة لخطأ ما، تحرك قطار ا متجهاً إلى ب فى نفس الوقت الذى تحرك فيه قطار آخر من ب متجها إلى ا . لا توجد إشارات أو أجهزة أمان على الخط ستتوقع حدوث تصادم إلا إذا حدثت ظروف استثنائية (مثل هبوب عاصفة تقطع الخط) .

ستوافق على أنه من الممكن لك أن تصل إلى هذه النتيجة باستخدام خيالك ولكن لاحظ الصورة القائمة التى أعطاها لك خيالك . فى أى نوع من البلاد تصورت أن هذا الخط موجود ؟ بين غابات ، أو مدن أو على قمة جبال ؟ هل وجدت صورة واضحة فى عقلك لحركات المكابس وللآلات الكثيرة الصغيرة الموجودة بعجلات القاطرة ؟ ماذا توقعت أن تكون التعبيرات المرسومة على أوجه السائقين ولون شعرهم وتكوين أجسامهم ؟ هل تصورت أن القطارين قطارا ركاب أم بضاعة ؟ يمكن أن

يستمر الإنسان فى ذلك إلى الأبد . ومع ذلك فمن المؤكد أنه مهما كان خيالك حياً واسعاً فإنك ستنسى بعض النقط ، ولكن ذلك لن يؤثر على الإطلاق على إجابتك عن السؤال : هل سيحدث تصادم ؟ إذا كنت قد فكرت فى القطارين كخرزتين تتحركان على سلك (وحركة القطارين يمكن توضيحها جيدا بهذه الطريقة لو وضع جدول لحركتيهما) ، فإنك ستصل إلى نفس النتيجة . يكفى لهذه المسألة أن نعتبر أن القطارين خرزتان وأن الخط الحديدى سلك . وطبعا بالنسبة لأغراض أخرى — مثلا إذا كان عليك أن توضح وجود عربات الإسعاف للجرحى أو إذا أردت أن ترسم صورة للحادث — سيكون من الضرورى أن تعرف تفصيلات أكثر .

من المستحيل تصور حدث بتفصيلات كاملة . عند مواجهة أية مسألة ، نقوم بتبسيط الظروف لحد معين . لا نهتم بالحقائق التى تبدو غير هامة . ونتيجة الإدراك ستكون صحيحة إذا كانت الصورة الموجودة فى الخيال ، ليست صحيحة تماما ، وإنما صحيحة بدرجة كافية للغرض الموجود أمامنا .

وعملية نسيان التفاصيل غير المهمة هذه تعرف بالتجريد وبدون التجريد يكون التفكير مستحيلا . إذا حاولنا أن نحصل





مراحل التجريد

(١) صورة تقريبية للمنظر كما قد توجد فى خيال شخص.
(٢) شكل بدون تفصيلات إلا التى تلزم لغرض معين؛ وهو إظهار أن القطارين على وشك أن يتصادما .

أغلب الأشكال فى الرياضة تشبه الشكل ٢ . تترك جميع التفصيلات فيما عدا مايلزم لغرض معين . ولكن وراء كل شكل من هذا النوع توجد صورة تشبه (١). إذا أمكنك أن تكتشف ماهية هذه الصورة ، ستجدأن من السهل جداً فهم الشكل .

على صورة كاملة لحدث حتى ولو كان بسيطا فإننا سنكون مضطرين لإضاعة عمرنا فى جمع المعلومات . وبعض الناس الذين لم يتعلموا تعليماً سليماً يقاطعون أية مناقشة معقولة باستمرار صائحين « ولكنك لم تعرف بالضبط ماذا تعنيه بهذه الكلمة » لا يمكن تعريف الأغلبية العظمى من الكلمات بالضبط (مثلا الكلمة أحمر) . الأمر المهم ليس التعريف المضبوط وإنما أن تعرف عن أى شىء تتكلم .

ينشأ كثير من سوء الفهم الخطير إذا نسى الإنسان طبيعة التجريد وحاول أن يطبق صورة للكون صالحة لغرض معين لا لتحقيق غرض آخر لا تكفى هذه الصورة لتحقيقه على الإطلاق، وفى هذا المقام نستطيع أن نسوق مثالين على الصعوبات التى تنشأ نتيجة لذلك .

وجهة النظر الميكانيكية للحياة

فى حقبة من الزمان طغى على الناس ولع جنونى غايته تفسير كل شىء بدلالة الآلات . فقد اكتشف أن حقائق كثيرة من حقائق الطبيعة وعلى الخصوص حركات الكواكب والمد والجزر والأجسام الصلبة على سطح الأرض يمكن تفسيرها باعتبار أن الكون مصنوع من كريات صغيرة صلبة تجذب بعضها البعض تبعاً لقوانين معينة محددة ، وبدلا من أن يكتفى بالقول بأن « لدينا نظرية

صحيحة بدرجة كافية لغرض معين ، قفز الفلاسفة والعلماء إلى نتيجة أعم فقالوا إنهم قد توصلوا إلى معرفة الحقيقة الكاملة للكون . ولم يكتفوا بالقول بأنهم توصلوا إلى معرفة حقيقة الشمس والقمر ، وأنهما مصنوعان من هذه الكرات بل زادوا فقالوا إن عقولنا أيضاً مصنوعة من هذه الكرات الصغيرة الصلبة، وكل ما نفعله هو نتيجة للطريقة التي تجذب بها هذه الكرات بعضها بعضا . وبالتالى فإن التفكير والشعور يجب أن يكونا مجرد خداع ، هذا على الرغم من الحقيقة البارزة وهى أن هذه النظرية نفسها قد توصل إليها نتيجة للتفكير .

ولا شك أن الطريقة التى اتبعت للوصول إلى هذه النتيجة طريقة غير علمية . ذلك أن من الواضح لأى إنسان أن الشجاعة والإخلاص والتصميم والحب هى حقائق مثلها فى ذلك مثل الأوزان أو الموازين . بدون هذه الصفات يكون من غير المحتمل على الإطلاق أن يستمر جنس من البشر أو الحيوانات فى البقاء طويلا . الاستنتاج العلمى هو : تعطينا نظريتنا نتائج صحيحة عن حركات القمر والكواكب ، وبالتالى يوجد بعض الصدق فيها ، ولكنها لا تؤدى بنا إلى التنبؤ باحتمال تجمع الذرات وتنظيمها لتكون الكائنات الحية ، وبالتالى فهى نظرية غير كاملة ، نظرية لا تأخذ فى اعتبارها بعض الأمور التى تقوم بها الذرات فعلا .

ربما تكون جذور هذه المسألة واقعة فى الشعور الخرافى بأن النتائج التى نحصل عليها بالنظر خلال ميكرسكوب أو تلسكوب تتفوق بكثير على المعرفة التى نحصل عليها فى حياتنا اليومية . لقد ذهبنا فى بعض الأحيان بعيداً إلى حد تقديس العلماء والاعتقاد بأن الرجال الذين يشتغلون فى المعامل يمكنهم حل جميع مشاكلنا . حقاً إن آراء عالم عظيم عن العلم الذى يشتغل به هى آراء جديرة بالاحترام ، وذلك لأنها مبنية على الحقائق . ولكن بمجرد أن يغلق العالم نفسه داخل معمله يكون قد ابتعد كثيراً عن الحياة اليومية للبشر . إذا تحقق عالم من ذلك ، وإذا حاول أن يتغلب على عزلته ببذل اهتمام خاص بالأحداث الجارية ، وبدراسة تاريخ البشرية فإنه قد يتمكن من تطبيق خبرته العلمية لنواح أخرى من الحياة . أما إذا أسرع مباشرة إلى معمله مملوءاً ، مثل أى إنسان آخر ، بالتحامل والجهل : فالاحتمال كبير فى أنه سيجعل من نفسه مغفلا .

خطوط إقليدس المستقيمة

المبتدئون فى الهندسة يدهشون فى بعض الأحيان عندما يقال لهم إن الخطوط المستقيمة ليس لها سمك . يقال لنا ، إننا لن نجد على الإطلاق خطاً مستقيما فى الحياة الفعلية ، وذلك لأن كل شىء حقيقى له سمك معين . ومع ذلك فإن الخط الواحد من خطوط

وهذا يشير إلى أن الرياضة البحتة تظهر أولا كدراسة للطرق والوسائل . والحق أن علماء الرياضة البحتة لم يظهروا فى التاريخ الإنسانى إلا متأخرين : فهم يمثلون مستوى عالياً من الحضارة . يأتى الرجال العمليون أولا ، وهم الذين يدرسون العالم كما هو ويكتشفون الطرق التى تفيد عملياً . لا يدرس علماء الرياضة البحتة العالم الطبيعى . فهم يجلسون ، كما كان الحال عليه ، فى المكتبة فى الطابق الأعلى . ويدرسون ما كتبه الرجال العمليون . وفى بعض الأحيان يثق الرجال العمليون بصحة طريقة ما تعطى النتيجة الصحيحة عادة ، ولكن ليس دائماً (انظر الباب الرابع عشر) . وظيفة عالم الرياضة البحتة عندئذ هى فصل الطرق المنطقية (أى التى تعطى النتائج الصحيحة) عن الطرق غير المنطقية .

علماء الرياضة البحتة متصلون بالعالم الواقعى ولكن فى الخطوة الثانية ، إنهم لا يجلسون منعزلين ويفكرون . المادة التى يدرسونها تتكون من الكتب الموجودة فى مكتبات العالم . وهذه الكتب لا تقتصر فقط على كتابات المهندسين . عادة تكون السلسلة طويلة جداً . يستشير المهندس « رياضياً تطبيقياً » (عالم الرياضة الذى يدرس الرياضة للمسائل التى تنشأ فى الحياة اليومية) : الرياضى التطبيق يستشير رياضياً بحتاً : الرياضى البحت يكتب بحثاً عن المسألة : ورياضى بحت آخر يشير إلى أنه يمكن حل المسألة إذا

نحن عرفنا فقط حل مسألة عامة أكثر من الأولى ، وهكذا تستمر السلسلة . وتنشأ مادة منشورة واسعة تبين الارتباط بين المسائل المختلفة . يصبح الموضوع كبيراً بدرجة أنه يستحيل تذكر كل ما كتب عنه : وتصبح الضرورة ماسة لأن تركز جميع النتائج المختلفة فى عدد قليل من القواعد . بعد قرن أو قرنين تبحث مسائل يبدو ألا علاقة لها بما يشغل المهندس الأول . ولكن الارتباط موجود حتى ولو كان من الصعب رؤيته .

هل الرياضة البحتة إذن هى مجرد دراسة الكيفية التى يفكر بها الرياضيون ؟ من المؤكد أنها ليست كذلك . لا يهتم علماء الرياضة البحتة إلا قليلا جداً بالكيفية التى يفكر بها الناس فعلا . إذا فقد جميع الرياضيون التطبيقيون عقولهم فجأة ، فإن الرياضة البحتة ستبقى دون تغيير . الرياضة البحتة هى دراسة الكيفية التى يجب أن يفكر بها الناس لكى يحصلوا على النتائج الصحيحة . وهذا العلم لا يأخذ فى حسابه نقط الضعف فى الإنسان . وربما يكون من الأصدق أن نقول إن الرياضة البحتة هى دراسة الكيفية التى يجب أن نصمم بها الآلات الحاسبة ، إذ نحن قررنا عدم الاستعانة على الإطلاق بالرياضيين من البشر .

تبدو الرياضة البحتة مقبولة لهؤلاء الذين يتفقون مع روبرت بروك فى تقدير :

« الجمال الهادئ » لآلة جبارة ، ولكن هذا التذوق يأتى متأخراً سواء فى تاريخ الجنس البشرى أو فى حياة معظم الأفراد . وإذا كان التعليم هو الهدف ، فمن الضرورى أن نتقن الطرق البدائية للرياضيين العمليين قبل محاولة إدخال الطرق المضبوطة للرياضة البحتة . هذا الكتاب يهتم فى الدرجة الأولى بالرياضة العملية ، وليس السبب فى ذلك أن الرياضيين العمليين يمكنهم الادعاء بأى تفوق على علماء الرياضة البحتة ، ولكن السبب هو مجرد أن خبرة التدريس أظهرت ضرورة ذلك .

وأيضاً أنا لا أدعى أن وجهة النظر التى اقترحتها عن الكيفية التى يتمكن الناس بها من الجدل ، لا أدعى أن وجهة النظر هذه غير معرضة للخطأ . إن الوقت الذى أنفقته فى دراسة تاريخ الرياضة ، وتاريخ البشر على العموم ، لم يكن بالطول الذى أوده . وأنا أعتقد فقط بأن وجهات النظر هذه هى فى الاتجاه الصحيح . ولكنى أعرف من خبرتى المباشرة أن أغلب بنى البشر يفكرون وأنهم محتاجون للتعليم ، وهذان أمران تؤدى بنا هذه النظرية إلى توقعهما .

النتيجة العملية

نلخص ما سبق : الإدراك الناجح لا يكون ممكناً إلا عندما

يكون لدينا صورة واضحة فى عقولنا عن الشيء الذى ندرسه . يتكون التصور ، ويصبح جديراً بالاعتماد عليه ، من خلال الاتصال العملى بالعالم الواقعى . وتكون الرياضة صعبة عندما تعرض كأمر منفصل تماماً عن حياتنا اليومية . يمكن للإدراك الرياضى أن ينمو بالتدريج وبطريقة طبيعية من خلال اشتغالنا عملياً بأشياء حقيقية . وهذا صحيح بالنسبة للرياضة العالية ،كما هو صحيح بالنسبة للرياضة الأولية . وفقط الرياضة البحتة فى أعلى درجاتها هى التى اتصالها بالحياة اليومية اتصال غير مباشر لدرجة ما .



الباب الرابع

رسم خطة الدراسة

« لقد علمت الرياضة والعلم التطبيقي أو الهندسة لجميع أنواع الأولاد والرجال تقريباً . ومن خبرتي أعتقد أنه يندر أن يوجد رجل يستحيل عليه أن يكون مكتشفاً ، وعاملا على تقدم المعرفة ، وكلما كان السن الذى تعطى له فيه الفرص لإظهار شخصيته وتجربتها مبكراً كان ذلك أفضل » — جون بيرى عام ١٩٠١

والشرطان الأساسيان للنجاح فى أى نوع من أنواع العمل هما الاهتمام والثقة . وعادة لا يهتم الناس كثيراً بهذين العاملين لأنهم يشعرون (بحق) بأنهم لن يستطيعوا أن يولدوا فى أنفسهم الثقة أو الاهتمام عن طريق الإرادة .

حقيقة أنه يمكنك أن تزيد الثقة بالإرادة والعزم . ولكن لا يمكنك أيضا بالتصميم أن تزيد من حجم عضلاتك ، أو تجعل ضربات قلبك تسرع إذا أنت اكتفيت بالجلوس على مقعد . وهذا لا يعنى أن من المستحيل تغيير قوة عضلاتك أو معدل ضربات قلبك . إذا أنت جريت لمدة نصف ساعة فإنك ستصل إلى كل من هذين الأمرين .

يمكن أيضاً تغيير الثقة والاهتمام باتخاذ الخطوات المناسبة .
والخطوات المناسبة ليست هي الإسراف في العمل ذلك أن من
المعلوم جيداً أن الإسراف في التمرينات الرياضية يؤدي إلى تحطيم
الجسم بدلا من بنائه . ونفس الأمر صحيح بالنسبة للعقل

في التمرينات الرياضية لا يسيطر العقل الظاهر على بعض الأعضاء المهمة . ولا يمكننا أن نصدر أوامر مباشرة للعقل أو الكبد أو الغدد . فيجب علينا أن نجد تمرينات تتوقف على حركات الأطراف وعلى المجهودات التي تبذلها العضلات التي يمكن التحكم فيها ، بحيث تسبب هذه التمرينات النتائج التي نرغب فيها بالنسبة للأعضاء الأخرى . وبعد أشهر قليلة من التمرين المناسب نشعر بالفائدة ، وبأن تغييرات لا بد أن تكون قد حدثت في أجسامنا بالرغم من أننا لا نعلم ماهية هذه التغييرات .

وفي التمرين العقلي أيضاً ، نجد أن التغييرات الحاسمة تحدث لا شعوريا ، واختبار أية طريقة للتعليم لا تتمثل في استطاعة التلاميذ إجراء حيل معينة ، كما هو الحال مع الكلاب . ومثل هذه الطريقة عديمة الجدوى بل ومهينة من أساسها . فهي تمكن الناس فقط من النجاح في امتحانات مواد لا يفهمونها ، ومن أن يصبحوا مؤهلين لوظائف لن يكونوا سعداء أو أكفاء فيها . الاختبار الحقيقي لأية طريقة تعليمية هو أعمق من هذا بكثير . بالمعالجة

الصحيحة ، يجد الطالب شعوره نحو الموضوع آخذ في التغير ، ويبدأ الطالب في فهم الأمور التي يشملها الموضوع ، ويشعر بثقة في أنه سيتمكن من السيطرة عليها ، ويبدأ بالشعور بالسرور من عمله ، ويأخذ في التفكير في هذا الموضوع في غير ساعات العمل ولا يمكن للعقل أن « يمسك » فعلا بالموضوع إلا عندما يوجد مثل هذا الاتجاه . فالناس يظهرون درجة من الذكاء والمعرفة بالنسبة لهواياتهم أعلى منها بالنسبة لأى جانب آخر من الحياة .

عدم الاهتمام

هل في الإمكان تحويل نوع من الاهتمام الذى نشعر به نحو هواية ما ونستخدمه في العمل ؟ يتوقف ذلك على السبب الذى من أجله تشعر بعدم الاهتمام .

يوجد أشخاص يتركز اهتمامهم في موضوع واحد . إذا كنت تشعر بأن لك هدفاً واحداً في الحياة سواء كان ذلك الرسم أو البحث عن علاج للسرطان — إذا كنت تشعر أن هذا الشيء هو وحده الذى يهمك أكثر من أى شيء آخر — أكثر من الراحة ، أو الثروة ، أو الاحترام ، أو الأمان ، أو الارتباطات العائلية ، والواجبات الاجتماعية ، وإنها جميعاً لا مغزى لها بالمقارنة

ب - إذا كان هذا هو الأمر فمن المؤكد أنه لا يوجد لديك أى شك فيما يجب عليك عمله .

ولكن عدد الناس المحددى الأهداف بهذا الشكل قليل جداً. فأغلب الرجال والنساء مستعدون لأن يتكيفوا وفقاً للعادات التى يجدونها حولهم ، وأن يشتغلوا فى أية وظيفة يمكنهم دخلها من المعيشة عيشة معقولة .

ومن المحتمل أن هناك أشخاصاً آخرين يقعون بين هاتين الفئتين . أشخاصاً يصبحون سعداء أو أكفاء فى اتجاه خاص من الحياة ، وتنقصهم المعرفة الذاتية ، أو الشجاعة ، أو التصميم لكى ينفصلوا عن نوع الحياة التى يتوقع غيرهم من الناس منهم أن يحيوها . لقد نتج عن الحرب حالات كثيرة ، نجد فيها أشخاصاً كانوا من قبل يبذلون جهوداً متلكئة لكى يتأهلوا لوظائف علمية، نجدهم وقد أخذوا يقومون بمهمات عملية مثل إطفاء الحرائق وقيادة اللوريات وهكذا فمن الواضح أنهم وجدوا نوع العمل المناسب لهم . وفى عالم مثالى ، سيشجع هؤلاء على القيام بمثل هذه الأعمال دون أن تكون هناك ضرورة لإشعال الحرب . . والمشكلة بالنسبة لهؤلاء الأفراد ليست الكيفية التى يتعلمون بها الرياضة وإنما كيف يتركون الرياضة فى أول فرصة ممكنة .

وعلى ذلك فهذا هو أول سؤال تسأله لنفسك : إلى أى نوع

تنتمى ؟ هل أنت شخص يهتم اهتماماً خاصاً بنوع معين من النشاط بحيث يمكنك ترك الموضوعات الأخرى (بما فيها الرياضة) وأن تنجح كخبير إخصائى ؟ أم أنك تنتمى إلى النوع الأكثر ذيوعا ، أى النوع المستعد لأن يحاول أى موضوع يقابله ؟

يجب عليك أن تقرر بالتحديد أحد هذين الطريقين . فإما أن تكون رغباتك بعيدة عن الرياضة بدرجة أنك لن تتمكن على الإطلاق من الاستفادة من الرياضة أو التمتع بها ، أو أنه يوجد شيء تعتقد أنه يستحق العمل فيه وتكون معرفة الرياضة ضرورية له . عند الإجابة عن هذا السؤال يجب أن تأخذ فى حسابك الحقيقة التى ذكرناها فيما سبق وهى أن نظام التعليم -فيما يبدو- مصمم بحيث ينتزع كل حيوية واهتمام من المواضيع التى تدرس . على أن الذى نعنيه بالرياضة هو الموضوع الحى ، وليس ما يدرس فى مدارس كثيرة .

وعلى ذلك ، فى بعض الأحيان يرجع عدم الاهتمام إلى الشخصية . ولكن الأغلبية العظمى من الناس الذين يكرهون الرياضة لا يسرى عليهم هذا الوصف . وأكثر الأسباب شيوعا لهذا الكره هو الطريقة التى تقدم بها الرياضة . يمكنك اختبار ذلك بنفسك : هل تحب الألغاز ؟ هل تستمع إلى البرامج الإذاعية التى يجيب فيها أشخاص أكفاء على الأسئلة العويصة ؟ هل تقوم

بحل ألغاز الكلمات المتقاطعة ؟ هل تلعب البريدج أو الشطرنج أو الطاولة ؟ هل تشترك فى المناقشات الحامية التى نسمعها فى بعض الأحيان مثل التساؤل عما يحدث إذا قذف ركاب سيارة بكرة رأسياً فى الهواء — هل ستعود الكرة ثانية إلى السيارة ؟ هل تهتم بأى نوع من أنواع التطور العلمى أو الميكانيكى مثل الرادار أو الطيران ؟ إذا كان هذا هو الحال فإنك لا تختلف عن الرياضى إختلافاً كبيراً فى أساس ما يثير اهتمامكما . أعرف أسرة (ليست ذات ثقافة عالية) انقسمت فى أحد أعياد الميلاد إلى عدة فرق ثائرة على بعضها ثورة شديدة ، وذلك بسبب مسألة السيارة والكرة . وفى المدرسة ، كان أكثر الأطفال تمسكاً بحلولهم لمثل هذه المسائل هم الأطفال العاديون جداً هذا الاهتمام بما قد يحدث هو قريب بالاهتمام الذى يشعر به العالم ، والعلم يقودنا بسرعة للرياضة .

إبعاد الخوف

من المحتمل أن أغلب الناس سيهتمون بالرياضة ، كما يهتم أغلبهم بالموسيقى ، وذلك إذا لم يخافوا منها . الاهتمام والثقة مرتبطان ارتباطاً وثيقاً . إذا أنت وجدت أنك تستطيع عمل شىء فإنك ستسر . وستحب الشعور بأنك سيطرت على الطبيعة ،

والشعور بأن غيرك من الناس سيعجب بك . سيدفعك لأن تعمل أكثر في هذا الموضوع ، وكلما عملت أكثر تحسنت . ومن ناحية أخرى إذا بدأت بفشل ، فإن تأثير ذلك يكون عكس ما سبق . لا يوجد شخص يحب أن يبدو مغفلا ستتجنب الموضوع أوستحاول أن تبدو أنك لا تهتم به . وستصل إلى قرار بأنك لن تنجح أبداً فلماذا تضيع طاقتك ؟ وعلى أية حال ستقنع نفسك بأنه لا جدوى من العمل . وجميع هذا لا علاقة له بحقائق الحالة: المحاولة اليائسة لعقل بشرى للمحافظة على توازنه واحترامه الذاتي . ومن المحتمل أنك ستركز اهتمامك على موضوع آخر ، أو أن تؤدى إحدى الألعاب بعنف وتقول لنفسك : « حسناً ، قد لا أستطيع دراسة الجبر ، ولكنى أهتم كثيراً بكرة القدم والكيمياء » .

في بعض المدارس يتبع أسلوب ممتاز عندما يفشل تلميذ تماماً في الدروس ، وهو أن يوجه التلميذ إلى بعض النشاط المفيد مثل النجارة أو الزراعة . عندئذ يتأكد التلميذ من أنه يمكنه عمل شيء ما جيداً ، ولكن يكون محتاجاً بعد ذلك لأن يخدع نفسه بالنسبة لدروسه . يمكنه أن يخاطر بالمحاولة الجدية للنجاح حيث أن ثقته بنفسه لن تذهب إذا هو رسب .

وعند محاولة التغلب على الخوف من موضوع يكون من

الضرورى أن تتحقق من هدفك الأول . ليست مهمتك الأولى هى أن تحفظ أية نتيجة معينة ، وإنما هى أن تتخلص من الخوف. يجب عليك أن ترجع إلى الوراء مرحلة معينة ، وتبدأ بعمل تكون متأكداً تماماً من أنك تستطيع القيام به . فمثلا عند تعلم لغة أجنبية ، يكون مما يساعدك أن تحصل على كتاب مكتوب بهذه اللغة للأطفال الذين يبدأون فى تعلم القراءة . مهما كان سوء طريقة تعليمك فمن المؤكد أنك تستطيع قراءة هذا الكتاب . هذا هو أول نصر لك لقد قرأت كتاباً كتب لكى يستخدمه شخص يتكلم لغة أجنبية .

وفى الرياضة أكثر من غيرها ، الرجوع لمرحلة سابقة أمر هام. فمن المستحيل فهم الجبر إذا لم يتمكن الإنسان تماما من الحساب ، ومن المستحيل فهم حساب التفاضل إذا لم يتمكن الإنسان تماما من الجبر . إذا حاولت المستحيل دون أن تتحقق مما تفعله فإن روحك المعنوية ستعانى .

وفضلا عن هذه الصورة المنطقية يوجد أيضا سبب نفسى . الاحتمال كبير فى أنك لا زلت تحتفظ بشعور الشك الذى كابدته خلال جميع المراحل المختلفة لتعليمك : لا زلت تشعر بالعقبات التى قابلتك عندما كنت فى الثامنة أو التاسعة من عمرك . هذا الشعور سيختفى على الفور إذا أنت عدت إلى الوراء وقرأت الكتب التى

كانت مقررة عليك عندئذ . وغالبا ستجد أن الصعوبات قد تلاشت دون أن تتحقق من ذلك .

ولهذا السبب توجد فى هذا الكتاب أبواب تعالج موضوعات مثل جدول الضرب . ستقرأ هذه الأبواب بدون صعوبة . وفى مرحلة معينة من الكتاب ستجد نفسك أمام ألغاز مرة أخرى . وهذا يعنى أنك قد وصلت إلى المرحلة التى تبدأ فيها معرفتك بالموضوع تتخللها ثغرات . وعند هذه النقطه أو عند نقطة سابقة يجب أن تبدأ مراجعتك وأن يجد الإنسان نفسه حائرا أمام الأشياء التى تعلمها توا هو أمر عادى جدا . وإذا دأبت على المراجعة وكان كل ما قمت به فى الستة أشهر السابقة أو العام السابق واضحا تماما بالنسبة لك فلا يوجد داع للقلق أو عدم الاطمئنان .

إحدى الطرق الجديدة للمراجعة هى أن تأخذ كتابا مقررا وتحاول حل الأمثلة المعطاة فيه . إذا أمكنك حل هذه الأمثلة بسهولة فليس من الضرورى قراءة الكتاب . وقد تجد صعوبة فى الأمثلة الخاصة ببعض الأبواب . وإذا كان الكتاب المقرر هو كتاب قرأته لأول مرة من عدة سنوات مضت ، فإنك غالباً ستعرف ما إذا كانت نتائج هذه الأبواب المعينة تستعمل بكثرة فى العمل التالى . إذا كان هذا هو الحال فإنك تكون قد وجدت سبب

الصعوبة التى قابلتك فى هذا العمل التالى . أما إذا لم يكن الحال كذلك فتستطيع أن تتركها فى الوقت الحالى .

وفى الرياضة يكون من الضرورى فى كثير من الأحوال أن ترجع فى أثناء عملك إلى الوراء . إذا وجدت صعوبة فى صفحة ١٥٧ من كتاب ما ، حاول أن تجد السبب فى ذلك . ابحث فيما إذا كانت صفحة ١٥٧ تستخدم نتائج صفحات أخرى سابقة من الكتاب ، أو تستخدم حقيقة ما مشروحة فى كتاب مقرر آخر سابق لهذا الكتاب فإذا كانت صفحة ١٥٧ تعتمد صفحات ٩ ، ٣٢ ، ١٢٨ اقرأ هذه الصفحات مرة أخرى وتأكد من فهمك لها . إذا لم تستطع فهم هذه الصفحات فلن يمكنك طبعا فهم صفحة ١٥٧ .

إذا كان الأمر لا يزال صعبا فاسأل شخصا آخر ليشرح لك الصفحة . لاحظ جيدا ما إذا كان يستخدم أية كلمة أو أى علامة أو أى طريقة تكون غريبة بالنسبة لك . إذا كان الأمر كذلك فاسأله أين تجد شرح هذه الكلمة أو العلامة أو الطريقة .

إذا أمكنك أن تعثر على ماهية صعوبتك فإنك تكون قد قطعت نصف الطريق نحو التغلب عليها يسير الناس فى كثير من الأحيان وفى رءوسهم ضباب من الصعوبات التافهة : ليسوا متأكدين تماما مما تعنيه الكلمات ولا مما حدث قبلا ولا من الغرض من العمل . ويمكن التغلب على جميع هذه الصعوبات بسهولة إذا أخذت

واحدة فواحدة. تكفى خمس دقائق مع الاستعانة بقاموس للتغلب على هذه الصعوبة بفرض أن الكتاب مكتوب بلغة بسيطة [1].

الأمر الثانى هو أن تعرف ما هى المعلومات التى يفترض أن تكون ملما بها قبل أن تحاول أن تفهم برهان نتيجة جديدة. ومن الممكن عمل شكل يبين الارتباط بين أجزاء كتاب، أى كيف يعتمد جزء منه على الأجزاء السابقة يجب على الإنسان أن يدرس الكتاب فى الاتجاهين، يجب عليه أن يعرف أن النتيجة الموجودة فى صفحة ٥٠ برهن عليها بواسطة النتيجة الموجودة فى صفحة ٢٩، وأنها أى النتيجة الموجودة فى صفحة ٥٠ ستستخدم فى برهان النتيجة الموجودة فى صفحة ١٤٤. (بالطبع أى شخص عاقل لن يحفظ أرقام الصفحة الفعلية الموجودة بها النتائج، ولكن قد يكون من المفيد أن تكتب فى هامش صفحة ٥٠ «انظر ص ٢٩، مستخدمة فى ص ١٤٤». كثير من الناس يحفظون نتائج كثيرة ولكنهم لا يربطون بينها أبدا بهذه الطريقة.

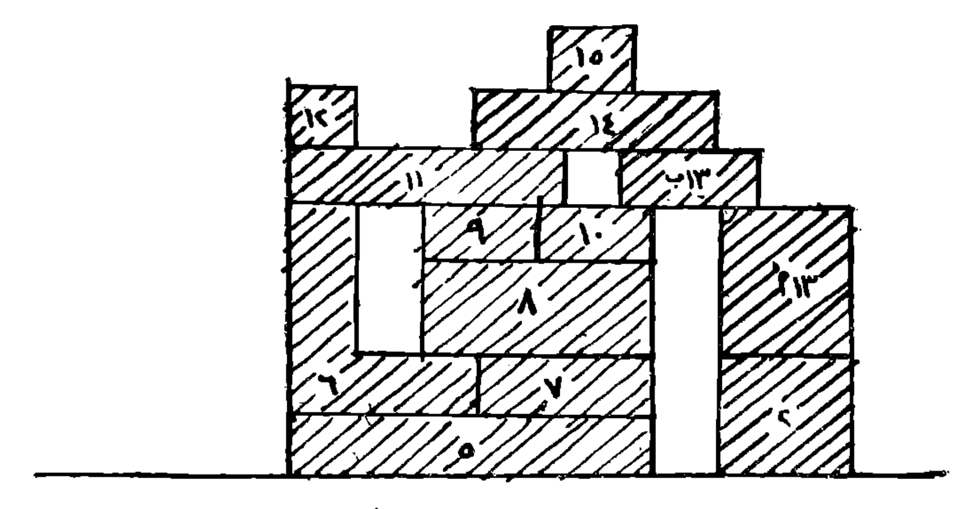
لم يكن فى الاستطاعة فى هذا الكتاب أن نعطى مراجع عن كل جملة لجميع الملاحظات التى ذكرت فى مواضع سابقة من الكتاب

---

(١) لقد حاولت أن أجعل الكلمات فى هذا الكتاب قصيرة بقدر الإمكان. وقد توجد كلمة أو كلمتان لا تكونان معروفتين للجميع. ومن العدل أن يبذل القراء جهداً ويبحثوا عنها فى القاموس.

والتى قد تساعد على الفهم . إذا لم تستطع فهم أية جملة فضع خطاً أسفلها. من المحتمل جداً أنه توجد ملاحظة فى موضوع سابق من الباب أو من الكتاب قصد بها خصيصا أن تعد للجملة الصعبة . ربما يكون قد فاتك تماما ملاحظة هذه العبارة عند أول قراءة . كانت تبدو ولا فائدة منها . ابحث فى الجزء السابق من الكتاب عن مثل هذه الملاحظات . إذا نجحت فى العثور عليها ، فاكتب مذكرة فى الهامش وهذا يوضح الجملة الموضوع تحتها خط فى صفحة . . . »

قد يبدو لك أن هذه النصيحة ليس فيها الكثير وأنها ظاهرة ولا تحتاج للذكر . قد تكون ظاهرة ولكن يلزم كثير من الاقناع للناس حتى ينفذوها . المعتاد هو أنه إذا وجد شخص صعوبة فى حساب التفاضل والتكامل أو حساب المثلثات فإنه لا يكون مستعداً لأن يصدق أن المشكلة الحقيقية هى الجهل بالجبر أو الحساب . يوجد دائما امتحان سيأتى بعد ستة أسابيع أو بعد عام أو أية فترة أخرى، وهذا الامتحان هو فى حساب التفاضل والتكامل أو فى حساب المثلثات وليس فى الجبر والحساب محاولة دراسة الرياضة العالية دون السيطرة التامة على الجزء السابق هى مثل محاولة اختراع طائرة بدون معرفة أى شىء عن محركات السيارات . لقد فشلت جميع محاولات صنع الطائرات فشلا ذريعاً إلى أن تطورت صناعة السيارات . تستغرق مراجعة الرياضة الأولية وقتا أقل بكثير مما يتصور الناس .



الخطة الأساسية لهذا الكتاب

فى هذا الشكل كل قطعة مظللة تمثل باباً . الأبواب ١ ، ٣ ، ٤ هى ذات طبيعة عامة وليست متضمنة فى الشكل .

كل قطعة تعتمد على القطع الموجودة تحتها . وبالتالى فمن المستحيل فهم الباب الحادى عشر بدون قراءة الأبواب ٦ ، ٩ ، ١٠ ، والبابان التاسع والعاشر بدورهما لا يمكن فهمهما بدون الباب الثامن وهكذا .

فى بعض الحالات تعتمد القطعة الأعلى على جزء صغير من القطعة السفلى . فمثلا يمكن فهم الباب الثامن بدون فهم جميع أجزاء الباب السادس . والواقع أن جزء الباب السادس الذى يلزم للباب الثامن هو الجزء الذى يشرح معنى العلامات ٤٣ ، ٥١٠ وهكذا . وليس فى الإمكان توضيح ذلك على الشكل .

الباب الثالث عشر مقسوم إلى جزئين ١٣ ا يمثل الجزء الأكبر من الباب هو أولى للغاية ١٣ ب يمثل نهاية الباب وهو متقدم أكثر .

إذا وجد قارئ صعوبة ، فى الباب العاشر مثلا ، فقد يكون من المجدى ترك الأبواب ١٠ ، ١١ ، ١٢ مؤقتا وقراءة الجزء الأسهل من الباب الثالث عشر .

ما عدد الكتب المقررة التى استخدمها طالب فى سن الثامنة عشرة ؟ كتاباً واحداً فى الحساب وكتاباً واحدا فى الجبر وربما عدة كتب فى الهندسة وحساب المثلثات الأولى ، وربما أيضاً كتاباً فى حساب التفاضل والتكامل . يمكننا ترك الهندسة جانباً مؤقتاً . ما الوقت الذى تستغرقه فى كتاب عن الحساب وآخر عن الجبر ولتجد ما إذا كانت هناك أية نتيجة هامة فاتتك وأنت فى المدرسة ؟ ما الوقت الذى تستغرقه كتابة قائمة بمحتويات هذين الكتابين على ورقة ، ووضع علامة بجانب النتائج التى تفهمها جيداً ، ليس بالوقت الطويل . إن ميزة القيام بذلك هى أنك ستبدأ ترى ما عليك دراسته سواء أكان كثيراً أم قليلا . يتجه الإنسان فى تفكيره إلى أن الجبر حقل واسع مملوء بما يثير اللبس ، ويتخبط الواحد فيه دون دليل . من الأفضل بكثير أن نفكر فى الجبر (أو جزء الجبر الذى يلزمك معرفته) كست طرق وعشرين نتيجة تقريبا ، ومن المحتمل أن تكون قد عرفت ٦٠٪ من هذه الطرق والنتائج فعلا . وحتى ذلك لا يلزمك مراجعته بأكمله فوراً . افرض مثلا أنك تجد صعوبة فى حساب التفاضل والتكامل لأنك ربما لا تعرف نظرية ذات الحدين . أحضر كتاب الجبر وابحث عن نظرية ذات الحدين . لا تهتم بالبرهان

فى الوقت الراهن . اجعل أولا ماهية نظرية ذات الحدين تتضح تماماً فى ذهنك . هذه النظرية مملوءة بالعلامات مثل $^{ن}ق_{ر}$ أو (ن ر) — تستخدم علامات مختلفة فى الكتب المختلفة — هذه العلامات مشروحة فى باب التباديل والتوافيق . ومرة أخرى لا تهتم بالبرهان انظر ما تعنيه هذه العلامات . حل عدداً قليلا من التمرينات — $^{٤}ق_{١}$ ، $^{٤}ق_{٢}$ ، $^{٤}ق_{٣}$ مثلا . أوجد كل من هذه كعدد . ارجع ثانية لنظرية ذات الحدين وخذ أمثلة خاصة لها . ضع ن = ٤ مثلا [1] . موضوع نظرية ذات الحدين هو العبارة $(س + ا)^{ن}$. ضع س = ١٠ ، ا = ١ ، احسب قيمة $١١^{٢}$ ، $١١^{٣}$ ، $١١^{٤}$. ما الارتباط بين $١١^{٤}$ والأعداد التى حسبتها فيما سبق ؟ احسب قيمة ١٠١ × ١٠١ ، ١٠١ × ١٠١ × ١٠١ ، ما الذى تلاحظه ١١ × ١١ ، ١٠١ × ١ ١ ؟ ما الذى تلاحظه عن ١١ × ١١ × ١١ ، ١٠١ × ١ ١ × ١٠١ ؟ هل نفس الأعداد تظهر فى كل من الحالتين ؟ هل تظن أن نفس الأعداد ستظهر فى ١٠٠١ × ١٠٠١ كما هى فى ١١ × ١١ ؟

وفى ١٠٠١ × ١٠٠١ × ١٠٠١ كما فى ١١ × ١١ × ١١ ؟ إذا

---

(١) إذا كنت من السعداء الذين لم يدرسوا الجبر أبدا ، وبالتالى ليس لديك أية أفكار مخطئة عنه ، لا تهتم بهذه الفقرة . معنى العلامات الجبرية مشروح فى الباب السابع

كان الأمر كذلك فإنك لست بعيداً عن اكتشاف نظرية ذات الحدين لنفسك . (إذا كان مايدل عليه ١١[٤] غير واضح بالنسبة ذلك فإن الملاحظات السابقة ستكون بدون معنى . ما يدل عليه الرمز ١١[٤] مشروح فى الباب السادس .)

بهذه الطريقة ،أى باقتفاء الأثر إلى الوراء ، ستعرف أجزاء الجبر المفيدة فى حساب التفاضل والتكامل . على الأقل ستعرف ما هى نظرية ذات الحدين . وكيف تساعدك على كتابة قيمة (١٠٠١)[٤] حتى إذا لم تستطع برهان صحة ذلك . عندما يشير كتاب أو محاضر لنظرية ذات الحدين ، ستتمكن من متابعة ما استخدمت فيه . وعندما تصبح فائدة ومعنى نظرية ذات الحدين مألوفين لديك تماماً فربما يكون من المجدى لك أن ندرس البرهان . (بعض الكتب تحتوى على براهين لا تثير الاهتمام على الإطلاق . ابحث عن كتاب يكون البرهان الموجود فيه قصيراً ومقبولا لك) .

القراءة بهدف

كنا الآن نستخدم كتابا فى الجبر بطريقة خاصة — بهدف . لم نحاول قراءة الكتاب كله . لم نهتم إلا بالأبواب الضرورية لفهم نظرية ذات الحدين . قد لا تظن أن هذا الهدف شيء مهم ، ولكنه

أفضل من لا شيء على الإطلاق . ستدهش كيف يبدو كتاب مقرر معقولا أكثر إذا أنت استخدمته بهذه الطريقة . يستحوذ عليك اهتمام محدد للحصول على هذه المعلومات — ستوفر عليك أى تأخير فى عملك . أنت لا تملأ عقلك دون نظام بجميع المعلومات الموجودة فى الكتاب . أنت تدرس فقط الأشياء التى تحتاج إلى دراستها .

يكاد يكون نمو الرياضة بأكملها قد تم بهذه الطريقة . أراد أحد الأشخاص أن يفعل أو يصنع شيئاً : كان من المستحيل عمله بدون الرياضة ، وبالتالى درست الرياضة ، وأعطى الهدف معنى ووحدة للعمل الذى يؤدى . مثال بسيط جداً : حاول أن تصنع نموذجاً لعمارة ذات سقف هرمى بقطع أجزاء من الورق المقوى ولصقها مع بعضها . ستجد أن الحصول على الأشكال المطلوبة ليس بالسهولة التى يبدو بها . من مثل هذه المسأله وبحثها علمياً يمكن أن تنشأ هندسة وحساب مثلثات كرى . بالعمل فى هذه المشكلة التى تخص صانع اللعب والمهندس المعمارى والقيام بالتجربة فيها ستحصل دون أن تدرى على الخيال الضرورى لدراسة الهندسة وحساب المثلثات والهندسة الفراغية .

الاهتمام بشىء غريب . توجد مئات من الأشياء التى تشعر أنه

يجب عليك أن تهتم بها ، ولكنك لا تتوقف عندها أبدا (لكى يكون المرء أميناً ولو لمرة واحدة) . توجد مئات من الأشياء الأخرى — ملاحظات غريبة ، قصص قصيرة لا هدف لها ،حيل تستخدم فيها عيدان الكبريت ، معلومات متفرقة غير هامة ، تبدو بدون فائدة فى الحياة ، ولكنها تبقى فى ذاكرتك لسنوات : فى المدرسة قرأنا كتابا فى التاريخ لمؤلفيه وارنر ومارتين . لم يتذكر أحد التاريخ (لم يكن المؤلفان مسئولين عن ذلك) .ولكن كانت هناك بعض الهوامش فى الكتاب : إحداها عن راعى كنيسة كان يزرع المحاصيل فى الفناء ، ويقول إنها ستصبح لفتا فى العالم التالى سيدة طلت صورة بالسواد وقالت « إنها سوداء من الداخل » ، قصيدة عن شخص ينتظر إيرل شاتام ، كل منا بقى متذكراً هذه العبارات لسنوات بعد أن تركنا المدرسة . كانت هذه هى الأشياء التى أثارت اهتمامنا فعلا .

إذا أردت أن تتذكر موضوعا وتتمتع به فيجب عليك أن تربطه بطريقة ما بشىء تهتم به فعلا . من غير المحتمل أن تجد تسلية كبيرة فى المراجع . إذا قرأت المراجع فقط ستجد أن الموضوع لا يثير الاهتمام . فالمراجع مكتوبة للناس الذين لديهم فعلا رغبة قوية فى دراسة الرياضة ، وهى ليست مكتوبة بغرض خلق هذه

الرغبة . لا تبدأ بقراءة الموضوع : ابدأ بالقراءة حول الموضوع كتب عن الحياة الفعلية تمس الموضوع بطريقة ما ، وتبين كيف ، أصبحنا محتاجين لهذا الموضوع .

فى أية مدينة كبيرة ستجد من السهل الحصول على كتب جيدة من المكتبة العامة ؛ وجميع المكتبات تستخدم نفس الطريقة فى عمل فهرس للكتب ، وهى الطريقة المعروفة بنظام ديوى العشرى ألق نظرة على الكتب بين الرقمين ٥١٠ ، ٥٣١ . فى خلال ساعة ونصف وجدت الكتب الآتية على الرفوف غير المغلقة لمكتبة ما نشستر المركزية ، وألقيت نظرة على محتوياتها ، وسأعطى الكتب هنا بالترتيب الذى اخترتها به . مر سريعاً على أى كتاب لا يبدو مقبولا لك . وتجد إلى جانب كل كتاب رقمه فى الفهرس .

٥١٠و٨ هو رسبورا . الآلات الحاسبة الحديثة . لا تحاول أن تقرأ هذا الكتاب قراءة كاملة . توجد صورة فوتوغرافية للآلات الحاسبة بالقرب من صفحة ٢٦ . إذا كنت تكره الحساب فلماذا لا تحاول صنع آله حسابية لنفسك ؟

٥١٠و٢ — ملور — الرياضة العالية لطلبة الكيمياء والطبيعة كتاب ممتاز ولكن لا تحاول قراءته قبل أن تكون مستعداً له .

٥١٥و٠ — أبوت — الهندسة العملية والرسوم الهندسية — كتاب مملوء بالتوضيحات ، يشمل المسائل التى تشبه مسألة نموذج المنزل .

كيف تقطع صفيحة مسطحة من المعدن لـكى تصنع مدخنة لموقد مثنية عند أحد مواضعها ؟ ما هو أفضل منحنى لصنع عجلات التروس ؟ ألق نظرة سريعة على الـكتـاب كله ، وابحث عن الموضوعات التى تثير اهتمامك ثم عد ثانية وحاول أن تجد نوع الرياضة الذى يلزم لـكل . لغة الـكتاب فنية . المبتدئون يجب أن يقنعوا بانطباع عام عن الـكتاب .

٥٢٣,٠ — سرفيس — متع التلسكوب — كتاب بسيط جداً وموضح جيداً يحتوى على خرائط للنجوم . سيحبه الذين لهم مواهب فنية — مفيد لرجال الطيران والبحارة الذين قد يستعينون بحركة النجوم فى القيادة عند الضرورة .

٥٢٢,٢ — بل — التلسكوب — مكتوب خصيصاً لصانعى التلسكوبات والنظارات المكبرة . مخصص للرياضة جزء صغير فقط من الـكتاب . أفضل طريقة — اقرأ الـكتاب وأشر على أى شىء لا يمـكنك فهمه ، استعن بعد ذلك بكتاب أولى عن البصريات (رقم ٥٣٥) . حاول تصميم تلسكوب ، ميكرسكوب ، آلة فوتوغرافية أولية . ميزة صنع تصميمك بالذات هى أنه يمـكنك استخدام أية أشياء مهملة قد تـكون فى حوزتك : نظارات قديمة ، عدسات مكبرة إلخ ... تـكفى الهندسة البسيطة جدا لهذا الغرض

إذا أنت وجدت الطريقة الصحيحة .

٥٢٦,٨ — هنكس — الخرائط والمسح — يشرح الباب الثانى السبب فى ضرورة الحصول على الخرائط. الباب الثامن قد خصص لنوع الخريطة التى يرسمها مكتشف البقاع ، والباب العاشر بالمساحة التقريبية التى يقوم بها المستوطنون الأوائل فى مدينة على الحدود . يبين الباب الثانى عشر كيفية عمل الخرائط بالتصوير الجوى . وبقراءة الأجزاء المناسبة من هذا الكتاب يمكن للمبتدئ فى حساب المثلثات أن يحصل على أساس مفيد ، كيفية عمل خريطة تقريبية لحقل . . إلخ . يعطى الكتاب أيضاً بعض الارتباطات غير المتوقعة بين الحياة العملية والمسائل العملية : الشكل المضبوط للأرض ومشاهدات النجوم ضرورية لعمل خريطة لمساحة كبيرة من الأرض مثل إفريقيا ، من الصعب عمل خريطة جيدة للهند لأن جبال الهملايا ثقيلة بدرجة تكفى لجذب خيط المطمار جذباً محسوساً وينتج عن ذلك أن هذا الخيط لا يشير مباشرة لمركز الأرض .

وفى سياق الكلام عن الخرائط ، نذكر كتاب « مفتاح للخرائط » لمؤلفه البريجادير هـ . سانت ، ج . ل . ونتر بوثام . يدل الرحالة على الكيفية التى يعرفون بها من خريطة كيف سيكون الاتجاه ، من أى مكان ، هذا إلى جانب أمور أخرى . كثير من المكتبات

يوجد بها هذا الكتاب أو يمكنها الحصول عليه .

٥٣٠,٣ — سوندرز — استعراض الفيزياء — يقول المؤلف « سنقدم للقارئ بعض أسرار الطبيعة وكذلك كثيراً من الاختراعات البارعة للإنسان » .

٥٣١,٠ — جودمان — تطبيق الميكانيكا للفنون الهندسية — يحتوى على قدر كبير من المعلومات . لست متأكداً من أن المبتدئين سيحبون هذا الكتاب . كما فعلت بالنسبة لجميع الكتب الأخرى ، تصفح هذا الكتاب ، واعرف أى شيء تستطيع معرفته ، ولكن لا تبتئس إذا وجدت أنك لا تستطيع أن تتبع بعض أجزائه على الإطلاق .

قد تجد شيئاً يثير اهتمامك تحت رقم ٣٨٥ ، السكك الحديدية ، ٦٢٠,٩ ، تاريخ العلوم الهندسية ، ٦٢٦ ، القنوات . إذا كنت تهتم اهتماماً خاصاً بأى موضوع ، سيدلك موظفو المكتبة أين تبحث . انظر فى الكتالوج فى أى جزء يثير اهتمامك . من الأفضل أن تنفق وقتاً طويلا فى البحث عن كتاب يثير الاهتمام فى الموضوع بدلا من قراءة عدة كتب تؤدى بك إلى الملل .

وغالباً ما يكون من السياسة الحكيمة أن تقرأ كتاباً تكون مادة تسعة أعشاره هى مجرد تذكير لك بأشياء عرفتها من قبل بينما العشر الباقى يحتوى على مادة جديدة . فى هذه الحالة سيكون عند

عقلك طاقة كافية لدراسة حقائق جديدة . لا تبذل مجهوداً كبيراً لكى تتذكر جميع التفصيلات . أى شىء يثير اهتمامك سيبقى راسخاً فى عقلك . إذا وجدت بعض المعلومات التى قد تحتاج إليها فيما بعد ، أكتبها فى كراسة تخصصها لهذا الغرض . يجب أن يكون هدفك أن يوجد فى عقلك نظرة عامة عن الموضوع ، وفى مكتبك مجموعة من الحقائق المضبوطة يمكنك استخدامها فى أية مسألة معينة .

كتب عن تاريخ الرياضة وطريقة تدريسها

إذا وجدت فى هذه الاقتراحات أية فائدة ، إذا أنت عن طريق قراءتك فى المكتبة أو بالنظر حولك فى الطريق وجدت أى شىء تحبه فعلا وتود أن تعرف أكثر عنه (حيث لا توجد عزيمة لا يوجد مخرج) ، فإنك ستجد نفسك قد أصبحت بسرعة إخصائياً فى هذا الأمر . وقد يكون ذلك أى شىء من الرادار إلى الكيفية التى تصمم بها المجارى ، مادام يثير اهتمامك . وكلما عرفت أكثر عن هذا الموضوع لن تتحمل المقدمات المعروفة وستجد نفسك راغباً فى الإجابات الكاملة عن الأسئلة ، وهو أسلوب الاحتراف أو التعلق بالمهنة . ستجد نفسك تقرأ المجلدات الضخمة التى كانت تبدو جافة فى العام السابق . لن تقرأها من البداية

للنهاية ستبحث بمهارة عن الفقرة أو الفقرتين التى تتعلق بما تريد أن تعرفه فى الوقت الراهن . وستتحقق من أنه يمكنك معالجة أى موضوع قد يثير اهتمامك فى المستقبل بنفس طريقة الاحتراف هذه ، وذلك مهما كان هذا الموضوع معقداً بالرغم من أنك قد لا تكون مهتماً بأية موضوعات أخرى فى الوقت الحالى . هذه الثقة وهذا التحرر من الخوف هى الصفة الأساسية التى تميز الخبير . ليس من الضرورى أن يعرف الخبير الكثير . يجب عليه أن يعرف كيف وأين يجد المعلومات .

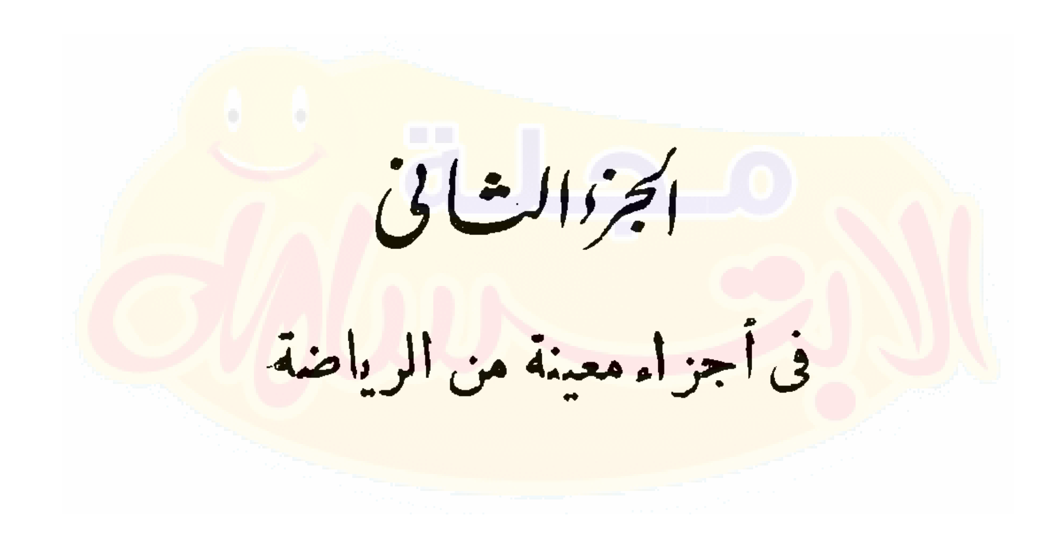
وكلما أصبح الموضوع الذى اخترته كهواية معروفاً لك بدرجة أفضل ، كلما بدأت تتحقق من مدى تقاربك من الرجال الذين عملوا فيه واكتشفوه . عندما تصل لهذه المرحلة ، قد تجد من المفيد أن تكون لديك فكرة عن التواريخ التى عاش فيها هؤلاء الرجال . وتوجد أسباب متعددة لذلك: (أولا) بملاحظة التواريخ يمكنك أن تأخذ فكرة عن مدى ما يعرفونه عن الموضوع . مثلا ، إذا وجدت أن كل الرياضة التى تعرفها اكتشفت قبل سنة ١٨٠٠ فإنك ستتحقق من أنه لا يزال عليك أن تتعلم الكثير . لقد شهد القرن التاسع عشر نشاطاً رياضياً هائلا . لن تقع فى خطأ محاولة إجراء بحوث قبل أن تبذل بعض المجهود لمعرفة ما إذا كانت المسألة التى تحيرك قد حلت من قبل . (ثانياً) إذا عرفت القدر الذى

كان معلوماً من الموضوع فى أى وقت ، فعادة يكون من الأسهل بكثير رؤية كيف اقترحت مخترعات معينة بواسطة أشياء معروفة فعلا . وهذا يساعدك على فهم الموضوع . (ثالثاً) إذا استعصى على فهمك شىء فإن قراءة تاريخ هذا الاكتشاف قد تساعدك ، وحياة المكتشف نفسه تساعد كثيراً فى أغلب الأحيان ، والمحاولات التى قام بها والتجارب التى أجراها قد تعطيك المفتاح . بهذه الطريقة يمكنك تجنب الصعوبة التى قابلتك بالقراءة فى المواضيع المحيطة بها ، وهو أمر أفضل بكثير من التخبط فيها دون جدوى . ولا يستغل التاريخ فى تعليم الرياضة إلا بدرجة بسيطة جداً .

عند اختيار كتاب تاريخى عن تعليم الرياضة ، ابحث عن كتاب يكون مقبولا لك ، ولا تنزعج إذا أنت لم تستطع قراءة الكتاب بأكمله . لا توجد طريقة كاملة (مثالية) للتعليم . الأمر الذى يناسب طالباً لا ينفع على الإطلاق مع آخر . ومهمة المدرس الموكل إليه تعليم فصل من خمسين تلميذاً هى مهمة تكاد تكون مستحيلة . إذا قرأت كتاباً عن التعليم ستجد أن هناك طرقاً كثيرة مختلفة لمعالجة الموضوع . قد تشعر أنه كان من الأفضل لك بكثير لو أنك تعلمت بإحدى هذه الطرق . لاحظ أسماء الناس الذين طوروا هذه الطريقة وانظر ما إذا كان يوجد فى مكتبتك أى من مؤلفاتهم . يحتوى كتاب تعليم الرياضة لمؤلفه ج . و يونج (١٩١١) :

The Teaching of Mathematics على وصف لاتجاهات متعددة في تدريس الرياضة ، والمؤلف واضح وذو صفات إنسانية . ستجد في هذا الكتاب عدداً كبيراً من المراجع يمكن أن يكون أساساً للقراءة التالية . وأحد المصلحين الذين ذكرهم يونج هو الأستاذ جون بيرى ، والاقتباس الموجود فى أول هذا الباب مأخوذ عن خطابه فى الجمعية البريطانية سنة ١٩٠١ . وهذا الكتاب يستحق القراءة لحديث بيرى وللاحظات قادة علماء الرياضة الحاليين . (أغلبها مؤيد) . وإن كل ما كتبه بيرى يستحق القراءة . ونذكر هنا كتابه حساب التفاضل والتكامل للمهندسين . لقد مضت أكثر من أربعين عاماً منذ أعطى بيرى هذا التوجيه: إذا كان الآباء والمدرسون والهيئات التعليمية عالمين تماماً فى يومنا هذا بما قيل فى سنة ١٩٠١ ، فإن كثيراً مما يقاسيه الأطفال عقلياً يمكن تجنبه ، ولا يوجد شك فى أننا نسير نحو هذا الاتجاه . ولكن مايزال أمامنا الكثير .


مـجـلـة
** معرفتي **
www.ibtesama.com
منتديات مجلة الإبتسامة



الجزء الثانى

فى أجزاء معينة من الرياضة

الباب الخامس

الحساب

« واحد ، اثنان ، كثير »
الطريقــة التاسمانية للعد

يلعب الحساب دوراً صغيراً جـداً فى الرياضة ، وعلى الخصوص فى الرياضة العالية . الهندسة ، كما رأينا فعلا ، يمكن دراستها مباشرة من الرسوم التى غالباً ما ترتبط بالأعداد البسيطة ٣ ، ٤ ، ٥ إلخ . . . وكلما تقدم الإنسان أخذ احتمال استخدام الحساب يقل . وهذا هو السبب فى وجود قصص كثيرة عن رياضيين مشهورين يدخلون فى نقاش مع محصلى الترام حول الباقى لهم ، ويظهر أنهم مخطئون .

لا يعتمد الحساب على أشياء معينة يتحتم حفظها عن ظهر قلب مثل جدول الضرب وجداول الجمع والطرح . من يتعلم الحساب عليه أن يصبح ماكينة . مثلا ، الموظف الذى يجمع قوائم طويلة من الأرقام لا يحتاج لأن يفكر تفكيراً عميقاً حول طبيعة العدد ويكفيه أن يرى الرقمين ٧ ، ٨ لكى يقفز العدد ١٥ فوراً إلى عقله .

وبينما يكون فى الإمكان تعليم الحساب بأسلوب ميكانيكى بحت ، فمن المؤكد أن من غير المرغوب فيه القيام بذلك . وحتى بالنسبة لأبسط العمليات ، من السهل تذكر ما يجب عمله إذا عرف الإنسان السبب . الحفظ الآلى قاتل بالنسبة لأى شخص يرغب فى الانتقال لفروع الرياضة الأخرى . حتى الآن لم يكتشف أى إنسان آلة تستطيع أن تفكر بنفسها . ومن المؤسف أنه لا تزال توجد مدارس (وعلى الخصوص مدارس الفتيات) يدرس فيها الحساب طبقاً للتعليمات « تفعل هذا وبعد ذلك تفعل ذلك » كما لو كان الموضوع طقوساً دينية .

وليس الحساب بالموضوع الذى يصعب عليك اكتشافه بنفسك . توجد أشياء كثيرة تقف على حافة الحساب . فمثلا عند إجراء عملية جراحية فى مستشفى ، تحمل الممرضة لوحة بخطافات تعلق فيها جميع الأشياء التى ستدخل فى جسم المريض ، والتى يجب أن تخرج ثانية . وقبل حياكة جروح المريض يجب أن تتأكد الممرضة من أنه لا يوجد أى خطاف ناقص . هذه العملية ليست عملية عد ، ولكنها قريبة جداً من أن تكون كذلك . عندما نعد على أصابعنا الطريقة الأولية !) فإننا نستخدم الأصابع بدلا من الخطافات .

العد بأصابع اليدين (أو اليدين والرجلين) لا يفيد إلا بالنسبة

للأعداد الأقل من عشرة (أو عشرين) (*) . العمل المشترك يلزم للتقدم أكثر من ذلك . إذا قبل أحد الأصدقاء أن تنبهه كلما وصلت فى العد إلى عشرة ، وأن يعد هذه التنبيهات على أصابعه فمن الممكن الوصول فى العد إلى مائة . وإذا وجد ستة أشخاص فمن الممكن الوصول فى العد إلى المليون ، هذا بالرغم من أن الشخص السادس يمكنه أن ينام أغلب الوقت . (لا أرى سبباً يمنع من العد بهذه الطريقة نفسها فى فصول الأطفال الصغار . وذلك لنفسر لهم ما نعنيه بعدد مثل ٢٤٣ . عندما يلعب الأطفال لعبة الاستخفاء يعد الأطفال بمحض اختيارهم أعداداً كبيرة نسبياً ويبدو أنهم يستمتعون بذلك) .

وفى الأساس ، تستخدم نفس هذه الفكرة فى الأجهزة التى تقيس المسافة التى تحركتها سيارة أو دراجة . وكل عجلة ، عندما تدور عشر دورات ، « تدفع » العجلة التالية . وماكينات الجمع تصنع على أساس الفكرة ذاتها .

(*) يمكنك أن تجد بعض التفصيلات المسلية عن الطرق البدائية للعد فى كتاب الثقافة البدائية لمؤلفه إ . ب تايلور Primitive Culture by E.B.Tayler

الباب السابع ، وفى كتاب العدد لغة العلم لمؤلفه توبياز دانتزيج Number, the Language of Science by Tobias Dantzig

البابان الأول والثانى .

ويمكن مساعدة التصور أكثر إذا قمنا بعد أشياء مادية محسوسة (عيدان ثقاب مثلا) . الشخص الأول يربط العيدان فى حزم كل منها يحتوى عشرة . الشخص الثانى يأخذ عشر حزم ويضعها فى صندوق . توضع محتويات عشرة صناديق فى حقيبة ومحتويات عشر حقائب فى زكيبة ، ومحتويات عشر زكائب فى سيارة ومحتويات عشر سيارات فى قطار — المراحل الأخيرة تتم فى الخيال فقط . وفى نفس الوقت يمكن توضيح تقدم العمل على لوحة كلوحة نتائج لعبة الكريكيت مثلا . سنجد بسرعة أن الرقم ١٢٧ والصوت « مائة وسبعة وعشرين » وصورة الصندوق وحزمتين وسبعة أعواد ثقاب ، سنجدها تندمج معاً فى عقل الطفل .

جميع العمليات ، مثل جمع ١٤ ، ٢٨ ، وطرح ١٧ من ٢١ ، وقسمة ٨٤ إلى ثلاثة أجزاء متساوية يمكن إجراؤها أولا بالتجربة بأشياء فعلية : وثانياً بالأشياء وبلوحات النتيجة معاً : وأخيراً بالكتابة فقط .

فى طريقة مونتسورى ، تدرس جداول الجمع بطريقة من هذا النوع . يوجد مع الأطفال عصى تمثل الأعداد من واحد إلى تسعة ، وعليهم أن يرتبوها بحيث يحصلوا على عشر وحدات فى كل صف كما يلى :

١ + ٩ = ١٠ و ١
٢ + ٨ = ١٠

وهكذا .

من المفيد للغاية أن يوجد فى حوزة الأطفال ورق مربعات، مقطع على هيئة شرائط عرض كل منها عشرة مربعات . والمربعات منمرة : ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠
١١ ١٢ ١٣ ١٤ ١٥ ١٦ ١٧ ١٨ ١٩ ٢٠
وهكذا . يمكن عندئذ إجراء جدول الجمع بلصق الشرائط ذات الطول المضبوط . وإذا احتاج عددان ، مثل ٧ ، ٦ ، إلى أكثر من صف واحد كامل ، فإن المربعات الزائدة تقطع وتثبت فى الصف التالى :

لقد سمعت رياضيين ناجحين يقولون إنه عند جمع ٧ ، ٦ كانت توجد فكرة « مختفية » فى عقولهم هى أن ٣ من الوحدات الست تلزم لإضافتها إلى ٧ لتصبح ١٠ ، وبالتالى تبقى ثلاث وحدات أخرى .

سبعة ست

٧ + ٦ = ١٣

يمكن تعميم هذه الطريقة لجدول الضرب ، وذلك بتكرار لصق الشرائط التى تحتوى على نفس العدد من المربعات . وتنشأ نماذج مثيرة . انظر إلى جدول « اثنين » ولاحظ كيف يبدو بسيطاً بالنسبة لجدول « ستة » .

	٢		٤		٦		٨		١٠
	١٢		١٤		١٦		١٨		٢٠

					٦				
	١٢						١٨		
			٢٤						٣٠
					٣٦				
	٤٢						٤٨		
			٥٤						٦٠

وأبسط الجميع (وأسهلها فى الحفظ) هو جدول العشرة ويليه جدول ٥ ، ٢ ، وبعد ذلك ٩ ، ٣ ، ثم ٤ ، ٦ ، ٨ ، وأصعب الجميع هو جدول ٧ — ربما يصلح لعمل ورق حائط جيد .

ومنظر النماذج يؤثر فى الجانب الفنى الذى يكون قوياً عند الأطفال . الرياضيون الممتازون حساسون جداً بالنسبة للنماذج .

والنماذج تثير أيضاً أسئلة . لماذا يشبه نموذج « ٣ » نموذج « ٩ » ؟ لماذا تكون نماذج « ٥ » ، « ٢ » منظمة فى خطوط رأسية ؟

قيل عن رامانوجان إن كل عدد كان يبدو صديقاً شخصياً له . يجب على الإنسان أن يحاول أن يقدم الحساب للأطفال بطريقة تجعلهم يتحققون من « الشخصية » التى يمتلكها كل عدد .

خمسة أسباع الياردة المربعة . للحصول على خمسة أسباع يجب أن نقسم المشمع إلى سبع قطع متساوية بالخطوط الرأسية الموجودة فى الشكل ص١٠٣ — ونأخذ خمس قطع من هذه القطع . وإذا قطعنا على طول الخط الرأسى الثقيل فإن القطعة الموجودة على اليسار تحتوى على الخمسة أسباع . نريد الآن ثلثى هذه القطعة . الخطوط الأفقية تقسم الشكل بأكمله إلى ثلاثة أجزاء متساوية . إذا قطعنا على طول الخط الثقيل الأفقى سنحصل على قطعة تساوى ثلثى الخمسة الأسباع . بعد القطع الأول تستبعد القطع المعلمة بدوائر ، وبعد القطع الثانى تستبعد القطع المبينة بعلامة × .

هذا الشكل يبين كيفية تمثيل $\frac{٢}{٣}$ من المرات $\frac{٥}{٧}$ بكسر واحد . لقد قسمنا الياردة المربعة إلى ٢١ من القطع التى لها نفس المساحة ونفس الشكل . المستطيل $\frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٧}$ يحتوى على ١٠ من هذه القطع الصغيرة . وكل قطعة هى $\frac{١}{٢١}$ من الياردة المربعة ، وعلى ذلك فإجابتنا هى $\frac{١٠}{٢١}$. وفى الواقع ، وجدنا قاعدة ضرب الكسور

$$\frac{٢}{٣} \times \frac{٥}{٧} = \frac{٢ \times ٥}{٣ \times ٧} .$$

وأحد الأخطاء المألوفة فى أوراق الإجابة تنتج عن أن التلاميذ يخلطون بين قاعدتى جمع وضرب الكسور . فهم يكتبون مثلا

$$\frac{١}{٢} + \frac{٣}{٥} = \frac{١ + ٣}{٢ + ٥} .$$

وهو كلام لامعنى له على الإطلاق؛ وذلك لأن الجواب الذى يحصل عليه بذلك هو $\frac{4}{8}$ ويختصر إلى $\frac{1}{2}$ الذى هو أقل من $\frac{3}{5}$.

هذا الخطأ يكون طبيعياً جداً إذا كان أسلوب التعليم الحفظ عن ظهر قلب . وكل ما حدث هو استبدال بالعلامة « × » العلامة « + » . واحتمال وقوع تلميذ أجرى تجارب على العلامتين × ، + وأصبح يشعر بأن المعنيين يختلفان لهاتين العلامتين ، احتمال وقوع مثل هذا التلميذ فى مثل الخطأ الذى سبق ذكره هو احتمال ضعيف جداً .

ومن المفيد للقارئ أن يصمم شكلا يوضح فيه الطريقة الصحيحة لجمع $\frac{1}{2}$ ، $\frac{3}{5}$.

الكسور العشرية

يجب ألا تنشأ أية صعوبة فى تدريس أو دراسة الكسور العشرية . ويمكن توضيح الكسور العشرية بنفس طريقة « العمل الجماعى » كما اقترح فى حالة الأعداد الصحيحة .

وقياس مستقيم هو عملية توضيحية مناسبة . المتر هو مقياس فرنسى لا يختلف كثيراً عن الياردة . الديسيمتر هو جزء من عشرة من المتر ، السنتيمتر هو جزء من عشرة من الديسيمتر ، والملليمتر

هو جزء من عشرة من السنتيمتر . المستقيم الذى طوله متر واحد ، ٣ ديسيمتر ، ٢ سنتيمتر ، ٥ ملليمتر يكتب باختصار ١,٣٢٥ متر .

وبينما نجد فى المقاييس الإنجليزية أنْ تحويل ٢ ياردة ، ١ قدم ، ٣ بوصة إلى بوصات ليس بسيطاً ، ففى حالة المقاييس الفرنسية يتضح على الفور أن ١,٣٢٥ متر يساوى ١٣٢٥ ملليمتراً أو ١٣٢,٥ سنتيمتر أو ١٣,٢٥ ديسيمتر .

المسطرة العادية التى تستخدم فى المدارس مقسمة إلى ملليمترات وسنتيمترات وديسمترات . وعلى ذلك فمن السهل تكوين الطول المذكور سابقاً — شريط طوله متر ، ثلاثة أشرطة طول كل منها ديسمتر ، سنتيمتران وخمسة ملليمترات .

طريقة جمع الكسور العشرية هى نفس طريقة جمع الأعداد الصحيحة . يمكن توضيح ضرب الكسور العشرية بمساعدة المستطيلات كما فعلنا فى حالة الكسور الاعتيادية .

الأعداد السالبة

ظهرت فى المجلة الفكاهية بنش Punch خلال حرب ١٩١٤ — ١٩١٨ صورة تبين موظفاً يقول لفلاح « لا يمكنك ياسيدى العزيز أن تذبح خروفاً كاملا مرة واحدة ! »

هذه الملاحظة السخيفة توضح أنه لا يوجد معنى للكسور بالنسبة لأشياء معينة : لا يمكن أن يوجد لديك نصف خروف حي : ولا يمكن أن تقسم ورقة إلى ثلاث قطع ونصف . ولكن يوجد للكسور معنى فى نواح أخرى : من السهل جداً أن يكون لديك ٣½ قدم من مواسير الرصاص .

وبنفس الطريقة ، توجد أوقات لا يمكنك أن تتحدث فيها عن أعداد أصغر من الصفر : كما توجد أوقات أخرى يكون ذلك فيها ممكناً .

من الجائز أن يوجد رجل بلا أبناء ، ولكن من المستحيل أن يكون لديه أقل من لاشىء. ويمكن ألا يوجد شىء فى صندوق : ولكن من المستحيل أن يوجد فيه أقل من لا شىء .

ولكن توجد أمثلة نذهب فيها إلى ما تحت الصفر . مثلا فى نظام فاهرنهيت لقياس درجات الحرارة يتجمد الماء عند درجة ٣٢، ويتجمد خليط من الماء والملح عند درجة الصفر . ومن الممكن الحصول على درجات حرارة أبرد من ذلك بكثير. تكتب درجات الحرارة هذه بعلامة سالبة . فمثلا — ١٠ درجات يعنى ١٠ درجات أبرد من درجة الصفر . تقابلنا درجة — ٢٢ فى الثلاجات التى يستخدم فيها النشادر . لاحظ أن — ٢٢ درجة هى أبرد من درجة — ١٠ .

بنفس الطريقة يمكننا أن نعالج الارتفاعات والأعماق . إذا سقطت قنبلة فى البحر من ارتفاع ٥٠ قدماً يمكننا اقتفاء سقوطها من ٥٠ قدماً إلى ٤٠ ، ٣٠ ، ٢٠ ، ١٠ ، صفر قدماً فوق سطح البحر. ولكن القنبلة لن تتوقف عند سطح البحر . قد تصل القنبلة إلى عشرة أقدام تحت سطح البحر ، ويمكن أن نسمى هذا ارتفاعا قدره — ١٠ أقدام .

إذا كان هناك رجل مدين بمبلغ جنيه فهو فى حالة أسوأ من آخر ليس معه مال على الإطلاق . فعلى الأقل الأخير حر . إذا سمينا ثروة الأخير صفراً من الجنيهات فيمكننا أن نقول إن ثروة الأول هى (— ١) جنيه . إذا كنت تملك (— ١) جنيه فيجب أن يعطيك شخص مبلغ جنيه حتى تصل إلى مرتبة من يملك لا شىء وأن يملك الإنسان (— ١٠٠) جنيه يعنى أن يكون مدينا بمائة جنيه ومرة أخرى — ١٠٠ هو أسوأ من ناقص ١ . وإذا وجدت علامة سالبة على يمين عدد ، فإن مرتبة العدد تعكس . و(— ١) جنيه يمثل ثروة أفضل من (— ١٠٠٠٠) جنيه .

بنفس الطريقة ، إذا تراجع جيش بمعدل ١٠ ميل فى الساعة يمكننا أن نقول إنه « يتقدم بمعدل — ١٠ ميل فى الساعة » . إذا كان الجيش يتحرك بمعدل « — ١ ميل فى الساعة » فهذا أفضل من التحرك بمعدل « — ١٠ ميل فى الساعة » .

الإشارة السالبة تقلب كل شىء رأساً على عقب ، مثل انعكاس الأشجار والمنازل فى نهر .

استمر الرياضيون لمدة طويلة فى الشعور بأنه ليس من العدل استخدام الأعداد السالبة ، ولكن وجدوا بمرور الوقت أن الأعداد السالبة يمكن استخدامها ، وجمعها وطرحها وقسمتها وأن يحصلوا من ذلك على نتائج مفيدة .

العمل بالأعداد السالبة

قد نرى كيفية استخدام الأعداد السالبة إذا نحن فكرنا فى الأعداد العادية على أنها تعنى شيئاً يعطى والسالبة على أنها شيئاً يؤخذ . وقد تفكر فى العدد ٥ مثلا كورقة مالية من ذات الخمسة جنيهات أو على شىء يعطى خمس مرات ؛ و — ٥ ستعنى عندئذ فاتورة قيمتها خمسة جنيهات أو شىء يؤخذ خمس مرات .

فى كثير من الأحيان نضع الأعداد السالبة بين أقواس ، مثلا إذا

أردنا أن نقول « أضف — ٤ إلى — ٣ » فسيبدو غريبا إذا نحن كتبنا ببساطة — ٤ + — ٣ . وبالتالى نكتب (—٤) + (—٣) وهذا يعنى أن الشيء الموجود بين القوسين الأوليين ، —٤ ، يجب جمعه على الشيء الموجود بين القوسين الثانيين ، — ٣ . (—٤) — (—٣) تعنى أننا يجب أن نأخذ — ٣ من — ٤ .

ماذا تعنى هذه الأمور عمليا ؟ يمكننا أن نقول إن — ٤مضافة إلى — ٣ تعنى أن رجلا كان مدينا بأربعة جنيهات ثم وصلت إليه فاتورة بمبلغ ثلاثة جنيهات فأصبح دينه الكلى سبعة جنيهات ، أو أن جيشا خسر ٤ أميال من الأرض ثم خسر ثلاثة أميال أخرى . فالخسارة الأولى أضيفت للخسارة الثانية . وفى كلتا الحالتين ، نرى أن خسارة ٤ مع خسارة ٣ هى نفس الشيء كخسارة واحدة قدرها ٧ وبرموز الحساب (— ٤) + (— ٣) = (— ٧) .

بنفس الطريقة ، إذا كان علينا أن نجمع ٤ ، —٣ ، فهذا يعنى مكسباً قدره ٤ متبوعاً بخسارة قدرها ٣ وواضح أن ذلك يعادل مكسباً واحداً قدره واحد . وبالاختصار ٤ + (—٣) = ١ .

وفى الواقع أن ٤ + (— ٣) تعنى بالضبط نفس ما تعنيه ٤ — ٣ . لا يوجد أى شيء جديد فى ذلك فيما عدا العلامات وهذه العلامات تستخدم بكثرة فى الحياة العادية ، لبيان التغيرات فى التجارة ، فى

البطالة ، فى موقف الأحزاب فى المعارك الانتخابية ، + للزيادة
— للنقص .

طرح الأعداد السالبة هو شيء يثير قليل من اللبس فى البداية .
من الأفضل أولا أن نكون واضحين عما يعنيه الطرح ٧—٣=٤
نعنى أنه بمقارنة رجل معه ٧ جنيه بآخر معه ٣ جنيه فإن الأول
يكون أفضل من الثانى بأربعة جنيهات . الطرح يعنى مقارنة
شيئين ويمكننا مقارنة الخسارة تماما كما نقارن المكسب . الجيش
الذى يفقد ٢٠٠ رجل هو فى مركز أفضل من الجيش الذى يفقد
١٠٠٠ رجل ، والأفضلية هى بمقدار ٨٠٠ رجل أنقذت حياتهم ،
وخسارة ٢٠٠ تكتب باختصار —٢٠٠ . وخسارة ١٠٠٠ تكتب
— ١٠٠٠ ، ولمقارنة الاثنين نطرح (—٢٠٠) — (—١٠٠٠) = ٨٠٠
لاحظ أنه لا توجد علامة سالبة على يمين العدد ٨٠٠ فإذا بدأ
جيشان يتقابلان بنفس العدد من الجنود ، فإن الجيش الذى يفقد
٢٠٠ رجل يكون أقوى من الجيش المضاد الذى يفقد ١٠٠٠ رجل
وذلك بمقدار ٨٠٠ رجل حى .

يمكننا بدلا من ذلك أن نفسر (— ٢٠٠) — (— ١٠٠٠) = ٨٠٠
على أنها تعنى أن الرجل المدين بمبلغ ٢٠٠ جنيه هو أفضل من
رجل مدين بمبلغ ١٠٠٠ جنيه وذلك بمقدار ٨٠٠ جنيه . أو يمكننا

أن نقول إن باخرة غارقة على عمق ٢٠٠ قدم تحت سطح البحر هى أعلى من أخرى على عمق ١٠٠٠ قدم تحت سطح البحر بمقدار ٨٠٠ قدم . وبالتالى فإن الأولى أسهل فى رفعها إلى سطح الماء .

ماذا عن الضرب؟ لا يمكننا أن نتحدث عن ذلك إلا باختصار . يمكننا أن نفكر فى ٤ × ٥ على أنها تعنى « أعطى شخصا أربعة أوراق مالية كل منها من فئة الخمسة جنيهات» وهذا يعادل تماما إعطاءه ٢٠ جنيها ، ٤ × ٥ = ٢٠

ماذا يعنى ٤ × (ــ ٥) ؟ ــ ٥ تمثل أخذ خمسة جنيهات ، أو فاتورة بمبلغ خمسة جنيهات ٤ ×(ــ ٥) تعنى أربع فواتير كل منها بمبلغ ٥ جنيهات وبالتالى فاتورة بمبلغ ٢٠ جنيها وعلى ذلك فإن ٤ × (ــ ٥) = ــ ٢٠ (ــ ٤) × ٥ تعنى نفس الشىء ، فهذه العبارة تناظر « اسحب أربع أوراق مالية كل منها من فئة الخمسة جنيهات » ، أى « اسحب ٢٠ جنيها » وعلى ذلك فإن

(ــ ٤) × ٥ = ــ ٢٠

وأدق الحالات هى (ــ ٤) × (ــ ٥) . إذا أخذنا ــ ٥ على أنها تعنى « فاتورة بمبلغ خمسة جنيهات » ، ــ ٤ على أنها « اسحب أربع مرات » ، (ــ ٤) × (ــ ٥) ستعنى « اسحب أربع فواتير قيمة كل منها خمسة جنيهات . إذا جاءك ساعى البريد وقال

لك أظن أن لك أربع فواتير كل منها بخمسة جنيهات ، وكان المفروض توصيلها للأسرة التى تسكن بجوارك ، ستجد نفسك أفضل بعشرين جنيها عن حالتك فيما لو كنت مقصودا فعلا بهذه الفواتير . أفضل تعنى + وعلى ذلك فتأثير إشارتين سالبتين مضروبتين معا هو إعطاء إشارة موجبة . وعلى ذلك نستنتج أن

$$(-٤) \times (-٥) = ٢٠$$

قد يشعر القارئ أن هذا الكلام ليس إلا ضجة بدون سبب على الإطلاق . كل منا يعرف أن الشخص يكون فى حاله أفضل إذا كان دائنا بأكثر مما هو مدين به . لماذا نثير كل هذه الضجة حول إشارتى + ، - ؟ الإجابة هى أننا لن نقتصر فى استخدامنا للإشارة السالبة على مجرد الناس المدينين . سنهتم فيما بعد بعبارات مثل

ص = $س^٢$ − ٣ س ، أو ص = (س − ١) × (س − ٢)

وهى عبارات قد تظهر فيها الإشارات السالبة . وهذا هو السبب الذى من أجله يجب علينا أن نعرف كيف نتعامل بالإشارات السالبة وسيظهر فى الأبواب التالية معنى العبارات الرياضية والفائدة التى يمكن الحصول عليها منها .

الأعداد التخيلية أو المؤثرات

ستلاحظ أن ٣ × ٣ = ٩ وأن − ٣ × − ٣ = ٩

أيضاً . لا يوجد أى عدد عادى (سواء + أم —) يعطى عند ضربه فى نفسه — ٩ . « إشارتان سالبتان تعطيان إشارة موجبة » .

من المعتاد تسمية ٣ × ٣ « مربع ٣ » : ٩ هى مربع ٣ . العدد ٩ هو أيضاً مربع — ٣ . ٣ ، — ٣ يسميان الجذران التربيعيان للعدد ٩ .

جميع الأعداد الممكنة لها جذران تربيعيان واحد موجب وواحد سالب . الجذران التربيعيان للعدد ٤ هما + ٢ ، — ٢ . الجذران التربيعيان للعدد ١٠ هما ٣,١٦ ، — ٣,١٦ بالتقريب .

ولكن يبدو أن الأعداد السالبة ليست لها أية جذور تربيعية . العدد — ٩ ليس له جذور تربيعية ولا العدد — ٤ ولا — ١٠ . الأعداد السالبة هى سندريلا [1] الرياضة بالنسبة للجذور التربيعية .

ولكن الرياضيين قد نجحوا فى إيجاد نوع من البديل للجذر التربيعى فى هذه الحالات . وهذا البديل يسمى مؤثر . المؤثرات ليست أعداداً ، ولكنها تستطيع أداء كثير من الأمور التى تؤديها الأعداد الحقيقية . فمثلا تستطع أن تضرب المؤثرات . ومؤثر

(١) يشير المؤلف هنا إلى الفتاة سندريلا فى القصة المشهورة : المترجان

معين يسمى (٣ت) بحيث إن ٣ ت من المرات لـ ٣ ت يساوى — ٩ . ومؤثر آخر يسمى « ت » بحيث إن ت × ت = — ١

يبدو هذا الـ « ت » كقصة رياضية خرافية . الشيء الذى يثير الاهتمام هو أن «ت» مفيدجدا بالنسبة لكثير من الأغراض العملية : مثل اللاسلكي والإضاءة الكهربائية . سنفسر فيما بعد ما هو « ت » ونبين أنه لا يوجد أى شيء غامض بالنسبة له على الإطلاق .

تمرينات

مسائل على النماذج

فى الأسئلة من ١ — ٤ ، يمكن استخدام ورق المربعات ، كما فعلنا بالنسبة لجداول الضرب . يجب على القارئ أن يفكر ما هو أفضل عدد للمربعات التى توضع فى كل صف . مثلا ، فى السؤال الأول إذا أخذنا تسعة مربعات فى كل صف (كما هو موضح) ، سيكون الموضوع واضحا .

١ — ألبرت وزوجته مجندان ، يأخذ ألبرت أجازة مساء كل تسعة أيام ، وزوجته كل ستة أيام ، وألبرت فى إجازة هذا المساء :

وزوجته ستأخذ أجازتها مساء الغد . متى (إذا كان هذا ممكنا على الإطلاق) يحصلان على أجازتهما فى المساء نفسه .

فى النموذج كل مربع يمثل إحدى الأمسيات وحرف ا يوجد

أ	ب						ب	
أ				ب				
أ	ب						ب	
أ				ب				
أ	ب						ب	
أ				ب				

داخل المربع عندما يكون ألبرت فى إجازة فى المساء الذى يمثله هذا المربع ، بالمثل إذا وجد الحرف ب داخل مربع كانت الزوجة فى أجازة فى المساء الذى يمثله . سنرى أن حرف ب سيأتى دائما فى العمود الثانى أو الخامس أوالثامن ، ولن يوجد على الإطلاق حرف ب فى العمود الأول حيث يوجد حرف ا دائما . الإجابة هى : لن يكونا أبداً فى إجازة فى المساء نفسه .

٢ — فى السؤال الأول ، هل يحدث تغيير لو أن الزوجة كانت تأخذ إجازتها كل خمسة أيام بدلا من كل ستة أيام ؟

٣ — فى أحد المعسكرات يقوم أحمد بالحراسة مرة كل

ثلاث ليال ، وبكرى مرة كل أربع ليال ، وجميل مرة كل خمس ليال ، وداود مرة كل ست ليال ، وهانئ مرة كل سبع ليال . بدأ جميع الرجال عملهم فى نفس الليلة ، الجمعة .

ما هو عدد الليالى الذى يمضى إلى أن يقوم أحمد وبكرى بالحراسة معا ثانية ؟ وكذلك أحمد وجميل ؟ ، وبكرى وجميل ؟

هل ستأتى ليلة يقوم فيها كل من أحمد وجميل وداوود معاً بالعمل ؟

فى أيام الجمع عندما لا يكون هناك تكليف بالحراسة ، يقضى الجند سهرتهم فى النادى . كم من المرات لا يستطع أحمد أن يذهب إلى النادى ؟ وكم من المرات لا يستطيع الآخرون الذهاب ؟

هل توجد أى ليلة من ليالى الأسبوع يستطيع أن يضرب فيها أحمد موعدا باستمرار ؟ أم أن عليه إن آجلا أو عاجلا أن يؤدى عمله فى جميع أيام الأسبوع ؟ وماهى الإجابة بالنسبة لكل من الرجال الآخرين ؟ (استخدم ورق مربعات يحتوى على سبعة مربعات فى كل صف وذلك لكى تأتى جميع أيام الجمع فى عمود واحد ، وبالمثل بالنسبة للأيام الأخرى) .

٤ — هل تستطيع ملاحظة أية قاعدة تتبعها الإجابة عن

السؤال الثالث ؟ هل تستطيع إجابة السؤال : كم يمضى من الزمن إلى أن يقوم الجميع أحمد وبكرى وجميل وداوود وهانى بالحراسة فى نفس الليلة ؟ وأية ليلة من ليالى الأسبوع ستكون هذه الليلة؟ .

٥ – يسير رجلان جنبا إلى جنب . وأحد الرجلين يسير أربع خطوات فى نفس الوقت الذى يسير فيه الثانى ثلاث خطوات . بدأ الرجلان السير معاً . ماهو الترتيب الذى سيسمع به صوت قدميهما ؟

(ارسم خطا يمثل مرور الوقت وعين عليه اللحظات التى تطرق عندها قدما الرجلين الأرض) .

٦ – يمكن تغيير السؤال حسب الرغبة – خمس خطوات مقابل أربع ، سبع خطوات مقابل خمس ... إلخ – وترسم الأشكال .

٧ – مطلوب عمل صندوق بحيث يمكن ملأه بالضبط إما بحزم طول الواحدة ست بوصات ، أو بحزم طول الواحدة ثمانى بوصات ، بحيث نوضع الحزم من إحدى نهايتى الصندوق إلى النهاية المقابلة . ما هو أصغر طول ممكن للصندوق ؟ .

مسائل البحث

ليس من المعتاد أن يحل الرياضى مسألة ثم ينساها نسياناً تاماً . فإذا

حل مسألة، يبدأ فى تغيير شروطها ويبحث فيما إذا كان لا يزال يمكنه حلها . فهو يريد أن يكون متأكداً من استطاعته الإجابة عن أى سؤال من هذا النوع قد يقابله فى المستقبل . وهو يريد أن يكتشف ما إذا كانت هناك قاعدة بسيطة تحل المسألة على أساسها . ويمكنك أن ترى من المثالين الآتيين كيف يعمل الرياضى .

مسائل كأس الفرق :

إذا دخلت سبع فرق فى مسابقة بحيث لا يلعب أى فريق ثانية إذا هو هزم مرة ، فما هو عدد المباريات التى ستلعب ؟ (افرض أنه لن يحدث تعادل أو إعادة مباراة) .

فى التصفية الأولى لابد من ترك فريق ؛ وتلعب ثلاث مباريات . فى التصفية الثانية ستبقى أربع فرق وهو الدور قبل النهائى . ستكون هناك مباريتان فى الدور قبل النهائى . ستلعب مباراة واحدة فى الدور النهائى . عدد المباريات الكلى هو ٣ + ٢ + ١ ، على ذلك فالإجابة هى ٦

من السهل الإجابة عن هذا السؤال المعين . ولكن افرض أنه بدلا من سبع فرق كان هناك ٧٠ أو ٧٠٠ .ما هو عدد المباريات التى يجب لعبها فى هذه الحالة ؟ إذا نحن حاولنا الإجابة عن السؤال بنفس الطريقة المباشرة السابقة فسيستغرق ذلك وقتا طويلا. إذا

أمكننا أن نجد قاعدة بسيطة توفر علينا حساب التصفيات واحدة فواحدة فإن ذلك سيساعدنا كثيراً .

ولكى يرى الرياضى ما إذا كان هناك قاعدة بسيطة ، يبدأ بحل أبسط الأمثلة الممكنة . إذا كان هناك فريق واحد فلن تلعب مباريات على الإطلاق . فى حالة فريقين يتحدد الموقف بمباراة واحدة . أوجد عدد المباريات التى يجب لعبها عندما يكون عدد الفرق ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ إلخ ستجد بسرعة أن هناك قاعدة بسيطة تربط بين عدد الفرق وعدد المباريات .

وأخيراً هل يمكنك ملاحظة السبب فى وجود هذه القاعدة البسيطة ؟ ما هو عدد المباريات اللازمة عندما يكون عدد الفرق ٢,١٧٦,٨٩٣ ؟ .

مسائل المدخل :

يوجد لغز معروف هو ما يلى :

عين موظفان فى أحد المكاتب . أحمد سيصرف له مرتب سنوى قدره ١٠٥ من الجنيهات مع علاوة قدرها ١٠ جنيهات كل سنة . حسن يصرف له مرتب نصف سنوى قدره خمسون جنيها مع علاوة قدرها خمسة جنيهات كل نصف سنة . أى الموظفين حصل على الشروط الأفضل ؟ .

يدهش أغلب الناس عندما يرون حل هده المسألة . كل ما نحتاج إليه لذلك هو أن نكتب ما يتسلمه كل من الموظفين كما يلي :

السنة	أحمد	حسن		المجموع
		يناير يونيو	يوليو ديسمبر	
	جنيه	جنيه	جنيه	جنيه
الأولى	١٠٥	٥٠	٥٥	١٠٥
الثانية	١١٥	٦٠	٦٥	١٢٥
الثالثة	١٢٥	٧٠	٧٥	١٤٥
الرابعة	١٣٥	٨٠	٨٥	١٦٥

من الطبيعى أن يظن الإنسان أن علاوة قدرها ٥ جنيهات كل شهر هى نفس الشيء كعلاوة قدرها ١٠ جنيهات ولكن الأمر ليس كذلك . المرتب السنوى لحسن يزداد بمقدار ٢٠ جنيها سنويا وهو قد حصل على شروط أفضل بكثير من أحمد .

ومن الطبيعى أن هذا السؤال يشير إلينا بأسئلة أخرى. علاوة قدرها خمسة جنيهات كل ستة أشهر تكافىء علاوة قدرها ٢٠ جنيها فى السنة . ماذا يحدث لو أن صرف المرتب كان كل ثلاثة أشهر ؟ ماذا تعنى كل ثلاثة أشهر بالنسبة للمرتب السنوى ؟ وماذا عن حالة صرف المرتب شهريا ؟ ماذا تعنى علاوة قدرها جنيه

شهريا بالنسبة لما يصرف فى سنة؟ ماذا تساوى علاوة قدرها شلن واحد أسبوعياً ؟

أو السؤال العكسى — ماهى العلاوة نصف السنوية التى تعادل علاوة قدرها عشرة جنيهات سنويا ؟ كل ثلاثة أشهر ؟ شهريا ، أسبوعياً .

ما هى القاعدة المتضمنة ؟ لماذا تذهب الأمور هذا المذهب ؟



الباب السادس

كيف ننسى جدول الضرب

« ياسيدى ،لقد قطعت هذه الرحلة الطويلة لأرى شخصك ولأعرف أية عبقرية وأى ذكاء ذلك الذى جعلك تكون أول من فكر في اللوغاريتمات التى تساعد كثيراً فى علم الفلك ، ولكن ياسيدى عندما وصلت إليك فإننى أتعجب لماذا لم يكتشفها أحد من قبل . عندما عرفتها الآن ظهرت لى أنها سهلة للغاية »

من بريجز لنابير (من كتاب تاريخ الرياضة) تأليف ف . كاجورى

إذا سألت مهندساً « ما هو ثلاثة أمثال أربعة » فإنه لا يجيب على الفور . إنه يخرج آلة غريبة تسمى المسطرة الحاسبة من جيبه ويعبث بها لحظة ثم يقول « حوالى ١٢ » . قد لا يؤثر فيك ذلك كثيرا . ولكن إذا قلت له « ما هو حاصل ضرب ٣٧١ فى ٤٣٣ » فإنه سيستغرق فى إجابة هذا السؤال نفس الوقت الذى استغرقه السؤال الأول تقريبا وبدون أن يحتاج لكتابة أية أرقام .

ما هى المسطرة الحاسبة ؟ كيف تصنع ؟ كيف اخترعت ؟ كيف تستخدم ؟

تتركب المسطرة الحاسبة من مقياسين ، مكتوب على كل منهما الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ .. إلخ . والمسافات الموجودة بين الأرقام المتتالية ليست متساوية كما هو الحال بالنسبة للأعداد الموجودة على المسطرة العادية . المسافة بين ٢ ، ٣ أقل من المسافة بين ١ ، ٢ ، وكلما تقدمت مع الأعداد اقتربت الأعداد المتتالية من بعضها .

١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ١٠ ١١ ١٢
٢ ٣ ٤ ٥ ٦

يبين هذا الشكل ٢ كيف يعد المهندس مسطرته الحاسبة لإيجاد ٣ × ٤ . إنه يدفع المقياس السفلى إلى أن يصبح رقم ١ عليه مقابلا لرقم ٣ على المقياس العلوى . والآن لاحظ كيف تتقابل الأرقام على المقياسين . فوق ٢ يقع الرقم ٦ : فوق ٣ يقع الرقم ٩ : فوق ٤ يقع الرقم ١٢ . فوق كل رقم على المقياس السفلى نجد ثلاثة أمثال الرقم على المقياس العلوى ، وعلى ذلك نقرأ الرقم الموجود فوق ٤ فنحصل على الجواب ١٢ .

ماهى القاعدة التى تعمل على أساسها هذه الآلة ؟ ما هو الطريق الذى أدى بأى شخص إلى أن يكتشفها ؟ وما السبب فى إمكان عمل آلة للضرب عموماً ؟

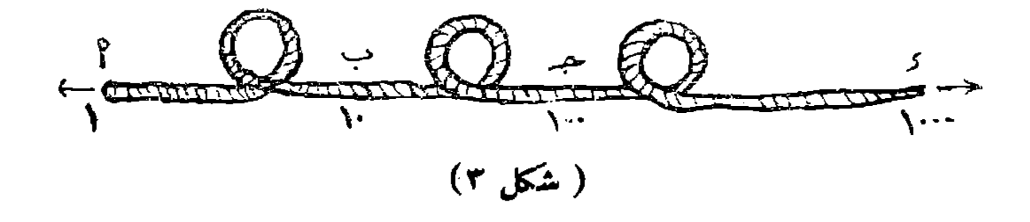
توجد آلات مألوفة لنا جميعاً وهى الآلات التى يضاعف بها

الإنسان قوته الشخصية ، البكرات والروافع والتروس . . . إلخ.

افرض أنك (خلال الحرب) كنت تراقب الحرائق من سطح منزل وكان عليك أن تنزل زميلا مجروحاً بواسطة حبل . يكون من الطبيعي أن تمرر الحبل على جسم ما ، أسطوانة خشبية مثلا ، وذلك لكي يساعدك الاحتكاك بين الحبل والخشب على التحكم فى سرعة سقوط صديقك . تستخدم بنفس الفكرة أيضاً مع الخيل : يمر حبل حول عمود ويمسك رجل بأحد طرفى الحبل بينما يربط الطرف الثانى فى الحصان . إذا أراد الحصان الانطلاق فعليه أن يبذل مجهوداً أكبر بعدة مرات من المجهود الذى يبذله الرجل .

يتوقف تأثير مثل هذه الطريقة على خشونة الحبل . دعنا نفترض أن لدينا حبلا وعموداً يزيدان القوة إلى عشرة أمثالها وذلك عندما يدور الحبل دورة كاملة .

ماذا سيكون التأثير إذا كان لدينا مجموعة من مثل هذه الأعمدة جذب شدته باوند عند ا يكفى لأن يعادل جذب ١٠ باوند عند ب ، وهذا سيعادل جذب ١٠٠ باوند عند حـ أو ١٠٠٠ باوند عند ى (شكل ٣) .



(شكل ٣)

كل عمود إضافى يضاعف عشرة مرات وعمود واحد يعطى عشرة أضعاف : اثنان يعطيان ١٠ × ١٠ ضعفاً : ثلاثة تعطى ١٠ × ١٠ × ١٠ ضعفاً . وحيث إنه يلزم حيز كبير لكتابة الصفوف الطويلة من العشرات ، يستخدم عادة اختصار لكتابتها . تكتب $١٠^{٢}$ بدلا من ١٠ × ١٠ و $١٠^{٣}$ بدلا من ١٠ × ١٠ × ١٠ وهكذا . (بنفس الطريقة $٨^{٥}$ ستعنى ٨ × ٨ × ٨ × ٨ × ٨) .

وعلى ذلك فإن $١٠^{٨}$ ستمثل تأثير ٨ أعمدة و $١٠^{١١}$ تأثير ١١ عموداً . هذا هو التأثير المضاعف . إذا مررنا حبلا حول ثمانية أعمدة ثم بعد ذلك حول أحد عشر عموداً آخرين فإن التأثير سيكون $١٠^{٨} \times ١٠^{١١}$. ولكن مجموع ٨ أعمدة ، ١١ عموداً هو ١٩ ، وبالتالى فإن ذلك لابد أن يكون هو $١٠^{١٩}$ بالضبط .

عدد الدورات اللازمة للحصول على أى عدد يسمى لوغاريتم هذا العدد . فمثلا يلزمك ٦ أعمدة لتضاعف قوتك ١٠٠٠٠٠٠ من المرات . وعلى ذلك فإن ٦ هى لوغاريتم ١٠٠٠٠٠٠ . وبنفس الطريقة ٤ هى لوغاريتم ١٠٠٠٠ .

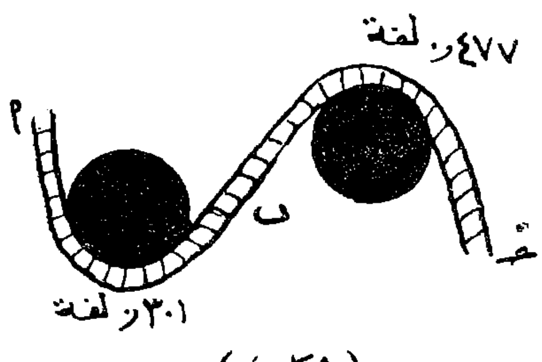
حتى الآن اقتصر كلامنا على الدورات الكاملة . ولكن يمكن تطبيق نفس الفكرة للدورات غير الكاملة . إذا أخذت بالتدريج فى لف حبل حول عمود ، يزداد التأثير بالتدريج أيضاً . فى البداية يجب أن تتحمل أنت الوزن الكلى . وكلما لف الحبل حول

العمود ، يأخذ الاحتكاك فى مساعدتك وستأتى مراحل يمكنك عندها أن تعادل ضعف ، ثلاثة أضعاف ، أربعة أضعاف مقدار جذبك . وعندما تتم لفة كاملة ستصل إلى عشرة أضعاف مقدار جذبك .

وتبعا لذلك فإن $١٠^{\frac{١}{٢}}$ تعنى تأثير نصف لفة ، $١٠^{٢\frac{٣}{٨}}$ تأثير $٢\frac{٣}{٨}$ من اللفات وبالمثل بالنسبة لأى عدد .

لوغاريتم ٢ سيكون هو جزء اللفة اللازم لمضاعفة قوة جذبك مرتين . ويسمى هذا العدد عادة « لو ٢ » للاختصار . والواقع أن ٠,٣٠١ من اللفة يلزم المضاعفة قوة الجذب مرتين ، ٠,٤٧٧ من اللفة يضاعف قوة الجذب ثلاث مرات ! وبالتالى فإن لو ٣ = ٠,٤٧٧ (هذه الأعداد يمكن الحصول عليها بالتجربة) . يمكن أن نكتب ذلك بطريقة عكسية . ٢ هو تأثير ٠,٣٠١ من اللفة إذن $٢ = ١٠^{٠,٣٠١}$. بنفس الطريقة $٣ = ١٠^{٠,٤٧٧}$

والآن ماذا يحدث لو أننا لففنا ٠,٣٠١ من اللفة حول عمود ، ثم ٠,٤٧٧ من اللفة حول عمود آخر ؟



(شكل ٤)

نعلم أن تأثير اللف على العمود الأول هو مضاعفة مجهودنا .
إذا جذبنا ا بقوة وزن باوند فإن ذلك سيكفى لمعادلة شد قدره ٢ وزن باوند عند ب (شكل ٤) . والعمود الثانى يعطى ثلاثة أضعاف : ٢ وزن باوند عند ب ستعادل ٦ وزن باوند عند حـ .
وعدد اللفات على العمودين معا ، ٣٠١و٠ + ٤٧٧و٠ = ٧٧٨و٠ من اللفة .

٧٧٧و٠ من اللفة يلزم للمضاعفة ستة أضعاف . ٧٧٨و٠ هو لوغاريتم ٦ . وجدنا لوغاريتم ٣ × ٢ بجميع لو ٢ ولو ٣ .

ليس من الضرورى استخدام أعمدة مختلفة . يمكننا التوفير فى الخشب بلف الحبل مراراً على نفس العمود . الشيء الوحيد الذى له تأثير هو طول الحبل الملامس للخشب . (العمود نفسه لابد أن يكون أسطوانياً . الأركان ستسبب تعقيدات) .

إذا أعطينا قطعتين من الحبل وكنا نعلم أن إحدى القطعتين تكفى لإعطاء سبعة أضعاف وأن الأخرى تكفى لإعطاء ثمانية أضعاف ، فيكفى فقط أن نربط نهايتى القطعتين معا لنحصل على قطعة تعطى ٧ × ٨ ضعفا .

وهذه الفكرة ، أى ربط إحدى نهايتى الحبل الأول بنهاية الثانى ، هى بالضبط نفس الفكرة التى تستخدم فى المسطرة الحاسبة . على المسطرة الحاسبة ، البعدين ١ ، ٣ هو طول الحبل اللازم لإعطاء ثلاثة أضعاف ، والبعد بين ١ ، ٤ يساوى طول

الحبل اللازم لإعطاء أربعة أضعاف ، وعند إيجاد ٣ × ٤ نضع هذين الطولين بحيث تتصل نهاية الأول بنهاية الثانى .

الواحد يأتى طبعا فى نهاية المقياس ، وذلك لأنه لا يلزمك أى حبل لتضرب قوتك فى ١ .

ستصبح الآن قادراً على معرفة السبب فى ازدحام الأعداد على المسطرة الحاسبة كلما تقدمنا . ١ يناظر عدم وجود حبل ، ١٠ تناظر لفة واحدة ، ١٠٠ تناظر لفتين ، ١٠٠٠ تناظر ٣ لفات . البعد على المسطرة الحاسبة بين ١ ، ١٠ هو نفس البعد بين ١٠ ، ١٠٠ ، أو بين ١٠٠ ، ١٠٠٠ : كل من هذه الأبعاد يساوى لفة كاملة واحدة . ولكن لا يوجد لدينا إلا تسعة أعداد واقعة بين ١ ، ١٠ : يوجد ٩٠ عدداً بين ١٠ ، ١٠٠ ، ٩٠٠ بين ١٠٠ و ١٠٠٠ . هذا هو السبب فى ازدحام الأعداد الكبيرة .

إذا أردنا أن نحصل على مجموعة من الأعداد التى يتساوى البعد بين كل اثنين متتاليين منها ، فيجب علينا أن نأخذ مجموعة مثل ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... أو ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ... فى المجموعة الأولى كل عدد يساوى عشرة أمثال العدد السابق له : توجد لفة واحدة بين كل عدد والتالى له .

فى المجموعة الثانية كل عدد يساوى ضعف سابقه : عند كل خطوة نضيف حبلا طوله ٣٠١و٠ من اللفة .

كيف نحسب اللوغاريتمات

لقد فسرنا ما هو اللوغاريتم ، ولكننا لم نبين كيف نحسبه . لقد قلنا إن البعد على المسطرة الحاسبة بين ١ ، ٧ هو طول الحبل اللازم المضاعفة سبعة أضعاف ، أى لو ٧ . ولكن لنصنع مسطرة حاسبة فعلية يلزم أن نعرف لو ٢ ، لو ٣ ، لو ٤ ، ... إلخ ، وذلك لكى يمكننا أن نكتب ٢ ، ٣ ، ٤ عند الأبعاد المناظرة .

اللوغاريتمات الوحيدة التى وجدناها حتى الآن هى لوغاريتمات ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ... إلخ . نحن نعلم أن قيم هذه اللوغاريتمات هى ١ ، ٢ ، ٣ ... وكل ما نستخلصه من ذلك بالنسبة إلى لو ٧٠ هو أن قيمته يجب أن تقع بين ١ ، ٢ ، وذلك لأنه يلزمنا أكثر من لفة ولكن أقل من لفتين لإنتاج أى عدد بين ١٠ ، ١٠٠ .

ويوجد شىء آخر غير واضح . لقد تكلمنا طول الوقت عن عدد من اللفات « اللفات » الكاملة ولكن قطر العمود لم يحدد الواقع . إنه يمكننا أخذ عمود أسطوانى مهما كان قطره ، ونمرر

حبلا حوله . هذا التنظيم قد يضاعف الجذب بأقل من عشرة أضعاف . نستطيع أن نصحح ذلك بزيادة خشونة العمود . وبالتالى يمكننا أن نفترض أن « اللفة » الواحدة تمثل أى طول نرغب فيه يمكن صنع المسطرة الحاسبة بأى أبعاد نريدها . يمكننا مثلا أن نضع ١ عند نهاية المقياس ، ١٠ على بعد قدم . ستقع ١٠٠ على بعد قدمين من ١ ، ١٠٠٠ على بعد ثلاثة أقدام ، وعند ذلك سنشعر أن الجهاز أصبح كبيراً بدرجة كافية . لاحظ أن حجتنا البسيطة لم تساعدنا إلا على الحصول على أربعة أعداد فقط على المسطرة — ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠

ولكن يمكننا معالجة المسألة بطريقة أخرى . إذا بدأنا من ١ وضاعفنا باستمرار ، سنحصل أيضاً على مجموعة من النقط البعد بين كل اثنتين متتاليتين منها هو نفسه : البعد بين كل نقطة والتى تليها هو لو ٢ . (ذكرنا فيما سبق أن لو ٢ هو ٠،٣٠١ ، ولكننا لم نعطى سبباً لذلك) . بدلا من تحديد مقياسنا بأخذ ١٠ على بعد قدم من ١ . افرض أننا نحدده بأخذ ٢ على بعد مناسب . قد نختار هذا البعد بحيث يكون بوصة واحدة من ١ . وحيث إن ٤ هى ٢ × ٢ فيجب أن يكون موضعها على بعد بوصتين من ١ ، وبما أن ٨ = ٢ × ٤ سيكون بعدها ٣ بوصات ، ١٦ على بعد ٤ بوصات ، ٣٢ على بعد ٥ بوصات ، ٦٤ على بعد ٦ بوصات ،

١٢٨ على بعد ٧ بوصات ، ٢٥٦ على بعد ٨ بوصات ، ٥١٢ على بعد ٩ بوصات ، ١٠٢٤ على بعد ١٠ بوصات . هذه المسطرة الحاسبة ظهر أنها أصغر من السابقة . فى هذه الحالة تقع النقطة ١٠٠٠ على بعد يقل قليلا عن ١٠ بوصات من النقطة ١ . ولكن ليست هذه هى النقطة المهمة . الشيء الأساسى الذى نلاحظه هو أن المسطرة الأولى لم يكن عليها إلا أربع نقط — ١ ، ١٠ ، ١٠٠ ، ١٠٠٠ ، ولكن محاولتنا الثانية أعطتنا إحدى عشرة نقطة ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ٢٥٦ ، ٥١٢ ، ١٠٢٤ .

وهذا يبين أنه يمكننا الحصول على نتائج أفضل لو أننا أخذنا بدلا من ١٠ ، ٢ عدداً ما يكون أقرب إلى ١ ، مثل $1\frac{1}{8}$ أو ١,١ أو ١,٠١ . سيلزم عمل أكثر للوصول من ١ إلى ١٠٠٠ إذا نحن استخدمنا أعداداً أصغر ، ولكن بمجرد أن نصنع المسطرة الحاسبة سنتمكن من استخدامها كلما دعت ضرورة لإجراء عمليات الضرب وبالتالى سنكافأ على مجهودنا .

وقبل أن نترك المسطرة الحاسبة ذات الإحدى عشرة نقطة ، نلاحظ أنها تمكننا من الحصول على فكرة تقريبية عن قيمة لو ٢ . لقد رأينا أن ١٠٢٤ وقع بعد ١٠ بوصات وبالتالى فإن ١٠ بوصات من الحبل تضاعف مجهودنا بمقدار ١٠٢٤ ضعفا ، ولكننا نعلم أن ثلاث لفات كاملة تضاعف المجهود ١٠٠٠ ضعفا .

وبالتالى فإن ١٠ بوصات لا بد وأن تزيد قليلا على ثلاث لفات كاملة . البوصة الواحدة يجب ألا تزيد إلا قليلا على $\frac{٣}{١٠}$ أو ٠,٣ من اللفة . ولكن الرقم ٢ موجود على بوصة واحدة . وعلى ذلك فإن ٢ تناظر أكثر قليلا من ٠,٣ من اللفة ، وهذا يعنى أن لو ٢ لا يزيد إلا قليلا على ٠,٣ . أى أن ما ذكرناه سابقاً من أن لو ٢ هو ٠,٣٠١ هو على الأقل قريب من الحقيقة .

كيف اكتشفت اللوغاريتمات

لقد صنعنا مسطرتنا الحاسبة الثانية بعملية مضاعفة مستمرة . سنصنع الآن مسطرة أفضل مستخدمين ١,١ بدلا من ٢ ، افرض أننا نحدد نقطتين على المقياس الذى نستخدمه وذلك لتمثيل ١ ، ١,١ . يمكن أن يكون البعد بينهما $\frac{١}{١٠}$ بوصة مثلا . وعلى ذلك فنحن نعلم أن مسافة مقدارها $\frac{١}{١٠}$ بوصة على المقياس (أو إذا كنت تفضل ذلك ، أن إضافة $\frac{١}{١٠}$ بوصة إلى طول الحبل) يمثل الضرب فى ١,١ . وسنتمكن إذن من وضع النقط ١ ، ١,١ ، ١,٢١ ، ١,٣٣١ ، . . . إلخ . ، حيث كل عدد يساوى مرة وعشر مرة مما قبله .

هذه الأعداد هى نفسها الأعداد التى تحصل عليها إذا أنت

حسبت جملة مبلغ جنيه بربح ١٠ ٪ فى السنوات المختلفة ، كل سنة تمر تزيد المبلغ المستثمر بمقدار عشر — أو بعبارة أخرى كل سنة تمر تضاعف المبلغ بمقدار ١,١ من المرات . من المحتمل أن يكون الشيء الذى أوحى بفكرة اللوغاريتمات لمخترعها نابير هو دراسة جداول الربح المركب .

يبين الجدول الآتى بعض الأعداد التى نجدها بهذه الطريقة والأبعاد التى تكتب عندها على المسطرة .

العـــدد	البعد بالبوصة
١,٩٤٨	٠,٧
٢,١٤٣	٠,٨
٢,٨٥٢	١,١
٣,١٣٧	١,٢
٥,٠٥٣	١,٧
٦,٧٢٥	٢,٠
٧,٢٩٧	٢,١
٩,٨٤٦	٢,٤
١٠,٨٣١	٢,٥

وهذا يبين أن الرقم ٢ يجب أن يقع على بعد بين ٧و٠ ، ٨و٠ من البوصة ، ٥ على بعد أقل قليلا ١,٧ بوصة ، ٧ على بعد بين ٢ ، ١و٢ بوصة ، ١٠ على بعد أكبر قليلا من ٤ر٢ بوصة . وبالتالى فإن « اللفة الكاملة » تناظر طولا أكبر قليلا من ٤و٢ بوصة .

هذه المعلومات لا تزال غير كافية لعمل مسطرة حاسبة جيدة بدرجة كافية . فمثلا نحن لا نستطيع نجد الوضع المضبوط للعدد ٧ . والجدول الذى أعطيناه لا يحتوى على أعداد بين ٦,٧٢٥ ، ٧و٣٩٧ لا يمكننا إلا التخمين بمكان العدد ٧ بين هذين العددين. الواقع أن هذه المسطرة الحاسبة هى عرضة لأخطاء تساوى ١٠٪ تقريبا وذلك نتيجة لحقيقة أن الأعداد يحصل عليها بإضافة ١٠ ٪ كل مرة — لا يمكن أن ننتظر أية درجة أعلى من الدقة .

يمكننا استخدام هذا الجدول فى إيجاد لوغاريتمات الأعداد ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ... إلخ ولكن النتائج التى نحصل عليها ستكون تقريبية فى الغالب . « لفة واحدة » هى البعد المناظر للعدد ١٠ : ونخمن هذا البعد على أنه ٤٢و٢ بوصة . والعدد ٢ يناظره بعد بين ٧و٠ ، ٨,٠ من البوصة — ربما ٧٣و٠ إذا عبرنا عن ٧٣و٠ كجزء من لفة ستحصل على قيمة لو ٢ على أنها خارج قسمة ٠,٧٣ على ٢,٤٢ ، وهذا يعطى ٣٠١٦و٠ — وهى نتيجة جيدة بالنسبة لمجرد الحدس وهو أمر يثير الشك ! .

ويستطيع القارئ أن يتصور درجة الدقة التى يمكن أن ترقى إليها المساطر الحاسبة وجداول للوغاريتمات باستخدام عدد مثل ١,٠٠٠٠١ للضرب المتتالى. عند عمل أول جداول للوغاريتمات استخدام نابير العدد ١,٠٠٠٠١ .

ليس من الضرورى طبعاً أن تقوم بعمل جداول لوغاريتمات خاصة بنا. لقد تم هذا العمل مرة وانتهى منه. والميزة الوحيدة التى تكسبها من عمل جداول لوغاريتمات ومسطرة حاسبة لنفسك هى فهمك للقواعد الأساسية للموضوع.

تبين الطريقة المشروحة فيما سبق لعمل جداول اللوغاريتمات السبب فى إمكان استخدام هذه الجداول لإجراء عمليات الضرب لقد وجدنا، مثلا، أن الضرب فى ١,١ سبع مرات يكافئ تماماً الضرب فى ١,٩٤٨ مرة واحدة، وأن الضرب فى ١,١ سبع عشرة مرة يكافئ الضرب فى ٥,٠٥٣ مرة واحدة (انظر الجدول السابق). وبالتالى فإن ١,٩٤٨ × ٥,٠٥٣ يناظر الضرب ١,١ سبع مرات متتالية متبوعاً بسبع عشرة مرة أخرى — أى يناظر الضرب فى ١,١ ٢٤ مرة متتالية وهذا (من الجدول) يناظر ٩,٨٤٦ . وعلى ذلك فإن ١,٩٤٨ × ٥,٠٥٣ = ٩,٨٤٦ .

الطريقة واضحة ١,٩٤٨ هو العدد السابع، ٥,٠٥٣ هو العدد

السابع عشر ٧ + ١٧ = ٢٤ ، فالعدد الرابع والعشرون فى الجدول يعطى الإجابة .

عند عمل مسطرة حاسبة خاصة بك، ضع ١,١ على بعد عشر بوصات من ١ ، ١,٩٤٨ على بعد يساوى سبعة أمثال البعد السابق وهكذا . بعد العدد ١,١ عن ١ لا يهم مادام العدد ١,٩٤٨ يقع على مسافة تساوى سبعة أمثال هذا البعد ، والعدد ٥,٠٥٣ على مسافة تساوى ١٧ مرة من هذا البعد ، وهكذا لا تزال الحجج صحيحة .

فى اللوغاريتمات العادية لو ١٠ هو ١ . رأينا فى مسطرتنا الحاسبة أن ١٠ تقع على بعد بين ٢٤ ، ٢٥ مرة بعد ١,١ . إذا اخترنا بعد ١,١ بحيث يقع بين $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{25}$ من البوصة فإن ١٠ ستقع على بعد بوصة واحدة . وسيصبح البعد المناظر لأى عدد مساوياً للوغاريتم العدد .

هذا التغيير فى المقياس يخفى بعض الشيء العلاقة ٧+١٧=٢٤ وفى جداول اللوغاريتمات ١,١ تناظر ٠,٠٤١٤ ، ١,٩٤٨ يناظر ٠,٢٨٩٦ ، ٥,٠٢٣ يناظر ٠,٧٠٣٦ لأول وهلة لا يبدو أن هناك ارتباطا بسيطا بين هذه الأعداد . ولكن لاحظ هذه الحقائق (١) لو ١,١ يقع بين $\frac{1}{24}$ ، $\frac{1}{25}$ كما توقعنا . (٢) لو ١,٩٤٨ هو سبعة أمثال لو ١,١ ولو ٥,٠٥٣ هو سبع عشرة مرة لو ١,١ . لا تزال

العلاقات البسطية مجردة . تغيير المقياس لا يغير الطريقة على الإطلاق : لضرب الأعداد نجمع لوغاريتماتها .

إذا طلب منا أن نحسب قيمة مقدار مثل ١٢ ^٣٥^ — أى تأثير ضرب العدد ١٢ فى نفسه خمس وثلاثين مرة — فإن ذلك يمكن أداؤه بسهولة . لضرب ١٢ فى عدد يجب علينا أن نجمع لو ١٢ على لوغاريتم العدد . إذا ضربنا العدد ١٢ فى نفسه خمسا وثلاثين مرة فعلينا أن نجمع لو ١٢ خمسا وثلاثين مرة . لو ١٢ هو ١,٠٧٩٣٠ وحاصل ضرب هذا العدد فى ٣٥ هو ٣٧,٧٧٢٠. العدد الذى لوغاريتمه ٣٧,٧٧٢ هو ٥٩١٦ متبوعاً بأربعة وثلاثين صفراً ! وعلى ذلك فهذه هى النتيجة التقريبية لضرب العدد ١٢ فى نفسه ٣٥ مرة . سيلزم وقت طويل نسبياً للحصول على هذه النتيجة بأية طريقة أخرى .

مسطرة حاسبة موسيقية

مفاتيح البيانو ، المعروفة للجميع ، هى فى الواقع مسطرة حاسبة . تتذبذب الأوتار الموجودة أسفل البيانو ببطء ، وكلما ذهبنا بعيداً على المفاتيح ازداد معدل الذبذبة . جواب النغمة (الأوكتاف) يناظر مضاعفة التردد ، أى معدل الذبذبة .

تتذبذب كل نوتة حوالى ٦ ٪ أسرع من النوتة التى أسفلها مباشرة . كل مرة يذهب الإنسان مسافة معينة على المفاتيح يضاعف التردد عدداً مناظراً من المرات . هذا هو نفس مايحدث على المسطرة الحاسبة .

تمرينات

١ – إذا أمكنك الحصول على مسطرة حاسبة وجداول لوغاريتمات لحقق صحة العبارة الموجودة فى الكتاب والتى تنص على أن كل عدد فى المسطرة الحاسبة موجود على بعد يتناسب مع لوغاريتمه .

٢ – اصنع مسطرة حاسبة لنفسك باستخدام جداول اللوغاريتم لتعرف أين يجب أن يوضع كل عدد .

٣ – اصنع مسطرة حاسبة بالطريقة المشروحة فى الباب السادس .

٤ – أين يقع الجذر التربيعى للعدد ١٠ على المسطرة ؟

٥ – اختبر دقة مسطرتك الحاسبة بإجراء العمليات ٢ × ٢ ، ٣ × ٤ × ٥ عليها وكذلك عمليات ضرب بسيطة أخرى .

٦ — لوغاريتم ٢ هو ٠٫٣٠١ لوغاريتم ١٫٠٥ هو ٠٫٠٢١٢. ما الزمن اللازم لمبلغ مستثمر بربح ٥ ٪ لكى يضاعف قيمته ؟

٧ — يرسل أحد الملوك ١٠٠٠٠ إناء ذهبي إلى ملك آخر تقع مملكته على بعد مسيرة عدد كبير من الأيام . حملت الهدية على الجمال . كل تاجر يورد الجمال لجزء من الرحلة يطلب كعمولة ١٠ ٪ من البضاعة التى تحملها جماله . وبالتالى فإن التاجر الأول لا يسلم للثانى ١٠٠٠٠ إناء ذهبياً وإنما ٩٠٠٠ فقط . إذا مرت الآنية بين يدى عشرين تاجراً ما هو عدد الأوانى التى يتسلمها الملك الثانى فى النهاية ؟ .

الباب السابع

الجبر ـــ اختزال الرياضة

« الرياضة لغة »

« ج . ويلارد جيبز »

يلعب الجبر دوراً فى الرياضيات يمكن مقارنته بالكتابة أو بالاختزال فى الحياة العادية . يمكن استخدام الجبر إما لذكر عبارة وإما لإعطاء تعليمات وذلك فى صيغة مختصرة .

الاختزال وحده لا يجعل الاكتشافات الجديدة ممكنة . وعلى هذا الأساس أغلب المسائل التى يمكن حلها بالجبر يمكن أيضاً أن تحل باستخدام العقل . ويمكن ترجمة عبارات الجبر إلى كلام عادى وبالعكس . العبارة الجبرية أقصر بكثير : بعض الحقائق أو التعليمات التى يمكن كتابتها بسهولة فى صيغة جبرية تكون طويلة ومعقدة عند التعبير عنها بالكلام العادى . هذه هى ميزة الجبر : بينما يمكن الحصول على النتائج بدونه ، فإن احتمال ذلك قليل .

سنتعرض هنا لبعض الأسئلة البسيطة ـــ أمثلة ربما تكون

غير مفيدة للغاية — لتوضيح الصورة التى تعطى للمجالات العقلية عند استخدام الرموز الجبرية ·

مسألة الكعك والفطائر

أغلب كتب الجبر فى باب « المعادلات الآتية » تعالج مسألة ما كالمسألة الآتية « دخلت قاعة شاى مرتين · فى المرة الأولى طلبت شطيرتين وكعكة واحدة ودفعت أربعة قروش . فى المرة الثانية طلبت ثلاث شطائر وكعكتين ودفعت سبعة قروش . ماهو سعر الشطائر والكعك » ؟ .

لقد حاولت هذه المسألة مع أشخاص لا يعرفون شيئاً عن الجبر وتمكنوا فى أغلب الأحيان من حلها . فهم يقولون : لقد دفعت فى المرة الثانية ثلاثة قروش أزيد من المرة الأولى . وبالتالى فإن ثلاثة قروش تمثل ثمن الشطيرة والكعكة الزائدتين . وثمن شطيرتين وكعكة هو أربعة قروش . إذن الفرق هو ثمن شطيرة ، أى أن ثمن الشطيرة هو قرش واحد . وأيضاً ثمن الكعكة يجب أن يكون قرشان .

قد لا تبدو هذه المسألة هامة ، ومع ذلك فهى تتكرر فى صورة

أو أخرى فى البحوث الرياضية ذات الصيغة العملية . وسنحاول حل مسألة من هذا النوع فى الباب الثامن .

وعلى ذلك فقد أجبر الرياضيون على تطبيق طريقة الجدل المشروحة فيما سبق فى مناسبات كثيرة مختلفة . وبالتدريج أخذوا، مثل الناس الآخرين، فى إدخال اختصارات لتقصير العمل يمكن أن تتخيل ما شرحناه مكتوبا على الصورة :

٢ شطيرة و ١ كعكة ٤ قروش

٣ شطيرة و ٢ كعكة ٧ قروش

١ شطيرة و ١ كعكة ٣ قروش

٢ شطيرة و ١ كعكة ٤ قروش

١ شطيرة ١ قرش

١ كعكة ٢ قرش

وفيما بعد سنبدأ فى كتابة « ش » بدلا من شطيرة ، « ك » بدلا من كعكة . إذا استبدلنا « و » بالإشارة + نحصل على الصورة الحديثة :

٢ ش + ك = ٤

٣ ش + ٢ك = ٧

وعلى ذلك ش + ك = ٣

ولكن $\quad$ ٢ ش + ك = ٤
اذن $\quad$ ش = ١
و $\quad$ ك = ٢

فيما سبق تدل ش على عدد القروش التى تدفع فى شطيرة ، ك عدد القرش التى تدفع فى كعكة . ستلاحظ أننا كتبنا ٢ ش للدلالة على ضعف العدد ش . لا تكتب أية علامة ضرب بين ٢ ، ش . لا توجد فائدة فى المجادلة ما إذا كان من الضرورى كتابة علامة الضرب فى هذا المكان . إذا كنت تشعر بارتياح أكثر بالصورة ٢ × ش فاكتبها بهذه الطريقة .

طبعاً ١٢ ش تعنى اثنتى عشرة مرة ش ، وليس ٢ × ١ × ش . قد تشعر أن هذه التفرقة تثير اللبس — ولكن كل نظام اختزال له عيوبه . وفى الجبر الأعداد مثل ١٢٣ المكتوبة إلى جانب بعضها البعض لها نفس المعنى كما فى الحساب ، ولكن ٢ ب حـ تعنى ٢ × ب × حـ .

حاول أن تترجم إلى لغة عادية العبارات الآتية :

ش + ك + ق = ٦
٢ ش + ٣ك + ق = ١١
٤ ش + ٨ك + ق = ٢٣

ش ، ك لهما نفس المعنيين السابقين ، ولكن مع كل مرة يوجد فنجان قهوة ثمنه ق قرشاً . هذه المسألة أيضاً يمكن حلها بسهولة . إذا اعتبرت الفرق بين الثمن فى الحالتين الأولى والثانية سنحصل على معادلة تحتوى على ش ، ك فقط . وبمقارنة الحالتين الثانية والثالثة ، سنحصل على عبارة أخرى لا يظهر فيها ثمن القهوة . لديك الآن عبارتان عن الشطائر والكعك :

ش + ٢ ك = ٥

٢ ش + ٥ ك = ١٢

إذا كان ثمن شطيرة وكعكتين هو خمسة قروش ، فإن ثمن شطيرتين وأربعة كعكات ، ضعف المقدار ، أى عشرة قروش . وعلى ذلك فإن ٢ ش + ٤ ك = ١٠ . ولكن لدينا ٢ ش + ٥ ك = ١٢ . بمقارنة هاتين المعادلتين سنرى أن ك = ٢ . إذن ش = ١ ، وبالرجوع إلى الحالة الأولى نجد أن ق = ٣ .

كقاعدة عامة لا توجد صعوبة فى حل المسألة من هذا النوع .

يمكن استخدام هذا الاختزال أيضاً للنص على حقائق . إحدى الحيل القديمة هى كما يلى ، فكر فى عدد . أضف إليه ٦ . أضرب الكل فى ٢ . خذ ٨ من النتائج . أقسم على ٢ . خذ العدد

الذى فكرت فيه أولا من النتائج » . مهما كان العدد الذى فكرت فيه فإن الجواب هو ٢ دائماً . لماذا ؟

كلمات	صور	جبر
١ ــ فكر فى عدد		ن
٢ ــ أضف إليه ٦		ن + ٦
٣ ــ اضرب فى ٢		٢(ن+٦) أو ٢ن+١٢
٤ ــ خذ ٨ من الناتج		٢(ن+٦)−٨ أو ٢ن+٤
٥ ــ أقسم على ٢		(٢(ن+٦)−٨) ÷ ٢ أو ن+٢
٦ ــ خذ العدد الذى فكرت فيه أولا من الناتج		(٢(ن+٦)−٨) ÷ ٢ − ن أو ٢
٧ ــ الجواب هو ٢		(٢(ن+٦)−٨) ÷ ٢ − ن = ٢

كل كيس مفروض أنه يحتوى على عدد من البلى يساوى العدد الذى فكرت فيه ، مهما كان هذا العدد .

نفس الصورة يمكن فى أغلب الأحيان وضعها بطرق مختلفة .

فمثلا يمكننا أن نصف الصورة ٥ كما يلى «كيس وست بليات ، مكررة مرتين ، أو بمجرد » كيسين ، ١٢ بلية . فى الاختزال الجبرى هذه الأوصاف نأخذ الصورة ٢ (ن + ٦) ، ٢ ن + ١٢ .

يمكننا أن نحل هذا اللغز بالتفكير فى صور . فكرر فى عدد — أى عدد — سنتخيل هذا العدد بلياً موضوعاً فى كيس . أضف ٦ إليه ، هذا يعطينا كيساً وست بليات . اضرب فى ٢ ، ينتج كيسان واثنتا عشرة بلية ، خذ من الناتج ٨ ، ينتج كيسان وأربع بليات . اقسم على ٢ ، ينتج كيس وبليتان . خذ من الناتج العدد الذى فكرت فيه أولا — أى خذ الكيس ، تبقى بليتان مهما كان عدد البلى الموجود فى الكيس .

فى الجبر لا نحتاج للكلام عن الأكياس والبلى . نقول : لتكن ن العدد الذى فكرت فيه أضف ٦ ، نحصل على ن + ٦ اضرب فى ٢ ، ٢ ن + ١٢ ، اطرح ٨ ، ن + ٤ اقسم على ٢ ، ن + ٢ ، اطرح ن . الجواب هو ٢ .

يمكننا التعبير عن العملية بأكملها ، وحقيقة أن الجواب هو دائماً ٢ بكتابة المعادلة الوحيدة الآتية :

$$\frac{٢(ن+٦)-٨}{٢} - ن = ٢ .$$

يبين التعبير الموجود فى الطرف الأيمن أنك تأخذ ضعف

(ن + ٦) وتطرح منه ٨ ثم تقسم الناتج على ٢، وأخيرا تطرح ن نستبدل فقرة من الـكلام بسطر واحد من الرموز .

يبين هذا المثال أن عبـارتين مختلفتين ظاهريا قد تمثلان فى الواقع نفس الشيء . وبالتالى فإن جزءا كبيرا من علم الجبر ينحصر فى معرفة التعبير عن أية نتيجة بأبسط طريقة ممكنة : ويعرف ذلك بالاختصار .

من الممكن أن يوجد للسؤال جوابان يبدوان مختلفين لأول وهلة ولـكن كل منهما فى الواقع صحيح .

افرض مثلا أنك تجد القاعدة التى اختيرت بها الأعداد الآتية

٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ٤٨، ٦٤ . قد تلاحظ أن هذه الأعداد تعطى بالقاعدة $١^٢$ — ١، $٢^٢$ — ١، $٣^٢$ — ١، $٥^٢$ — ١، $٦^٢$ — ١، $٧^٢$ — ١، $٨^٢$ — ١ والعدد النونى هو $ن^٢$ — ١ . (ستتذكر من الباب السادس أن $٥^٢$ هى اختصار ٥ × ٥) وبالاختصار العدد النونى هو $ن^٢$ — ١ ولـكنك تلاحظ أيضاً أن ٦٣ هو ٧ × ٩ ، وأن ٤٨ هو ٦ × ٨ ، وهكذا . العدد الثامن هو العدد السابق للعدد ٨ (أى ٧) مضروباً فى العدد التالى للعدد ٨ (أى ٩) أول عدد صفر ، هو العدد السابق للعدد ١ (أى صفر) مضروباً فى العدد التالى للعدد واحد (أى ٢) . وهذا يشير إلينا بالقاعدة للعدد النونى : اضرب العدد السابق للعدد ن (وهو ن — ١) فى العدد التالى

للعدد ن، وهو (ن + ١) وهذا يعطى الصيغة (ن − ١) × (ن + ١).

كل من هاتين صحيح. مهما كان العدد ن ستجد دائماً أن (ن − ١) × (ن + ١) هو نفسه ن٢ − ١.

استخدمنا هنا الرموز الجبرية كاختزال لكتابة تعليمات كيف نعرف الأعداد فى مجموعة معينة. هذا الاستعمال للجبر كثير الحدوث. ليس من الضرورى للشخص الذى يستخدم صيغة أن يفهم لماذا تكون هذه الصيغة صحيحة. فمثلا إذا كان على أحد المهندسين العسكريين أن ينسف أحد كبارى السكك الحديدية فإنه سيحسب كمية المفرقعات التى تلزم لذلك بواسطة قانون: ليس من الضرورى بالنسبة له أن يعرف كيف وجد هذا القانون. وبنفس الطريقة، توجد قاعدة تقول: إذا أردت أن ترى أميالا عددها (ن) من البحر فيجب أن تكون عيناك على ارتفاع $\frac{٢ن^٢}{٣}$ عن سطح البحر. نحصل على هذا القانون من الهندسة ولكن يمكنك استخدام هذا القانون بدون أن تكون لديك أية معرفة بالهندسة، واكتشاف أن رجلا طويلا واقفاً على الشاطىء يمكنه أن يرى تقريباً ثلاثة أميال من البحر (وذلك لأن $\frac{٢ \times ٣^٢}{٣}$

أتعطى ٦ قدام للارتفاع المطلوب)، بينما لرؤية ١٢ ميلا يلزمك أن تقف على صخرة ارتفاعها ٩٦ قدما . يمكن استخدام مثل هذا القانون فى تصميم بارجة حربية لمعرفة الارتفاع الذى يجب أن يكون عليه المشاهد لرؤية تأثير مدافع البارجة .

أغلب القوانين تحتوى على حروف متعددة مختلفة فمثلا قد ترغب فى معرفة كمية المعدن التى تلزم لصنع أنبوبة دائرية يجب أن نعرف طول الأنبوبة وسمكها ومحيطها ومقطعها . فلنسم الطول ل والسمك س ، والمحيط الخارجى م من البوصات .يوجد قانون يدلنا على أن الأنبوبة فى هذه الحالة ستحتوى على ل س (م — ٣,١٤ س) بوصة مكعبة من المعدن . وعلى ذلك فأنبوبة طولها ١٠ بوصة وسمكها ½ بوصة ومحيطها ١٥ بوصة ستحتوى على :

١٠ × ½ × (١٥ – ٣,١٤ × ½) = ٥ × ١٣,٤٣ = ٦٧,١٥ بوصة مكعبة

يمكن ذكر قاعدة مثل هذه بالكلام ، ولكنها تكون أطول من ذلك بكثير . الاختزال بسيط بدرجة أنه لن تنشأ أية صعوبة فى حفظ القانون : ل للطول ، س للسمك ، م للمحيط . ومع ذلك فكثير من الناس يرتعدون من رؤيه إحدى صفحات الرموز الجبرية ، وآخرون يظن فيهم الذكاء الخارق لأنهم يفهمون الجبر .

فى العصور السابقة ، كان يعتقد أن الشخص الذى يستطيع

القراءة والكتابة ، كان يعتقد فيه أنه عالم . واليوم نحن لا نأبه على الإطلاق للقراءة والكتابة . الجبر أيضاً هو لغة – لا يزيد أو يقل فى الغموض عن الكتابة العادية ما دمنا نعرف حروفه الهجائية وقواعده .

أمثـــــلة

١ – يمكننا التعبير عن التعليمات « فكر فى عدد (ن) ، ضاعفه ، وأضف إلى الناتج ٥ » بالعبارة المختزلة ٢ ن + ٥ ترجم إلى لغة الجبر المختزلة الجمل الآتية :

ا – فكر فى عدد ، أضف إليه ٥ ، ثم ضاعف الناتج .

ب – فكر فى عدد ، اضربه فى ٣ ثم أضف إلى الناتج ٢ .

حـ – فكر فى عدد . اكتب العدد التالى له . اجمع العددين .

ء – اضرب عدد فى العدد التالى له .

هـ – فكر فى عدد واضربه فى نفسه .

٢ – ترجم الرموز المختزلة الآتية ثانية إلى جمل مثل الموجودة فى السؤال الأول .

(ا) ٢ ن + ٤ (ب) ن – ١ (حـ) ٣ (ن + ١)

(ء) $\frac{1}{2}$ (٤ ن + ٨) (هـ) $\frac{1}{2}$ ن (ن + ١)

احسب ما تعطيه هذه الصيغ إذا كان العدد الذى فكرت فيه هو ٦ ثم إذا كان العدد هو ٣ .

٣ — لكى ترى ن من الأميال من البحر يجب أن تكون عيناك على ارتفاع $\frac{٢}{٣}$ ن^{٢} عن سطح البحر . أوجد جدولا يبين الارتفاع الذى يجب أن تكون عليه عينيك لكى ترى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ١٠ من الأميال .

٤ — لقد رأينا أن (ن — ١) (ن + ١) يعطى ن^{٢} — ١ بالضبط وقد اختبرنا صحة ذلك بوضع ن = ١ ، ٢ ، ٣ ، ... ، ٨ على التوالى . هذا لم يثبت أن تعبيرين يكونان متساويين دائماً وإنما جعل ذلك محتملا . باستخدام هذه الطريقة يمكنك أن تبين احتمال صحة بعض النصوص المذكورة فيما يلى ، وأن البعض الآخر خاطئ بالتأكيد . بين إلى أى النوعين ينتمى كل نص . وتدل ن هنا على أى عدد .

(ا) (ن + ١) + (ن — ١) = ٢ ن

(ب) ن = ٢ ن

(حـ) ٢ (ن + ٣) = ٢ ن + ٦

(ء) ن^{٣} — ١ = (ن — ١) (ن^{٢} + ن + ١)

(هـ) ٤ ن + ٢ هو دائماً عدد زوجى (ن عدد صحيح)

(و) ن (ن + ١) هو دائماً عدد زوجى (ن عدد صحيح)

(ز) (ن + ١) (ن + ١) = $\text{ن}^{٢}$ + ١

(ى) $\frac{\text{٢ن}}{\text{ن}^{٢} - ١} = \frac{١}{\text{ن} + ١} + \frac{١}{\text{ن} - ١}$

٥ — إذا كان يلزم ا من الدقائق لإعداد آلة معينة للعمل ، ب من الدقائق لصنع سلعة واحدة بالآلة ، فما هو الزمن اللازم لإعداد الآلة للعمل وصنع عشر سلع ؟

ما هو الزمن اللازم لإعداد الآلة للعمل وصنع عشر سلع عددها ن ؟

أكتب على التوالى الزمن اللازم لإعداد الآلة وصنع سلعة واحدة ، لإعداد الآلة وصنع سلعتين ، . . . إلخ .

٦ — فى السؤال الخامس الزمن اللازم لصنع سلع عددها ن بعد إعداد الآلة للعمل هو ا + ب ن دقيقة . الجزء الأخير من السؤال يتطلب منا أن نضع فى القانون ا + ب ن ، ن = ٠ ، ١ ، ٢ . . . على التوالى ، وهذا يعطى ا ، ا + ب ، ا + ٢ب . إلخ ووضع قيمة محددة بدلا من ن فى القانون يسمى التعويض عن ن .

وعلى ذلك فإن ا + ٢ب هو نتيجة التعويض ن = ٢ فى القانون ا + ب ن .

أيضاً إذا عوضنا ن = ٧ فى القانون $ن^٢$ — ١ نحصل على $٧^٢$ — ١ . وفى السؤال الثالث ، عوضنا ن = ٠ ، ١ ، ٢ .. على التوالى فى القانون $\frac{٢ ن^٢}{٣}$. لن تتمكن من متابعة الباب الثامن إلا إذا كانت هذه الفكرة مألوفة لك . وهذه النقطة هى موضوع الأمثلة التالية .

(ا) إذا كان قطار يقطع ع من الأميال فى الساعة ، فإنه يسير ن ع ميلا فى ساعات عددها ن . أوجد جدولا يبين المسافة التى يقطعها القطار فى ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ساعة .

(ب) ماذا يصبح الجدول إذا كانت ع = ٣٠ ، أى إذا كان القطار يسير بمعدل ٣٠ ميلا فى الساعة ؟

(حـ) ماذا يصبح الجدول إذا كانت ع = ١٠ ؟

(ى) ما نتيجة التعويض ن = ٤ فى العبارة ٥ ن — ١ ؟

(هـ) ما نتيجة تعويض ن = ١ فى ٢ $ن^٢$ + ٣ ن + ٥ ؟

(و) إذا عوضت عن ن بالأعداد ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... إلخ على التوالى فى القانون $ن^٢$ + ٤ ن + ٤ ، ما الذى تلاحظه على الإجابات التى تحصل عليها ؟

(ز) ما نتيجة التعويض عن ن بالأعداد ٠ ، ١ ، ٢ على التوالى فى العبارة ا ن^{٢} + ب ن + حـ ؟

ملاحظة — هذا السؤال الأخير يبدو أنه يزعج الطلبة ، ولكن تلزمنا الإجابة عنه للباب الثامن . قارن هذا السؤال بالسؤال السابق .

(و) . بوضع ن = ١ فى ٢ ن^{٢} + ٣ ن + ٥ ينتج ١٠ وذلك لأنه عندما ن = ١ ، ن^{٢} تصبح ١^{٢} ، أى ١ وتصبح العبارة ٢ ن^{٢} + ٣ ن + ٥ ، ٢ × ١ + ٣ × ١ + ٥ ، أى ٢ + ٣ + ٥ . وبالتالى فإنه عندما ن = ١ ، تضاعف الأعداد التى تظهر فى العبارة (٢ ، ٣ ، ٥) إلى بعضها . سيحدث ذلك مهما كانت هذه الأعداد إذا وضعت ن = ١ فى العبارة (مثلا) ١٠ ن^{٢} + ١٧ ن + ٣٥ ، سنحصل على النتيجة ١٠ + ١٧ + ٣٥ التى مجموعها ٦٢ . إذا وضعت ن = ١ فى أية عبارة من هذا النوع (ن^{٢} عدد من المرات ، ن عدد من المرات ، وعدد مجموعين معاً) تحصل على النتيجة بجمع الثلاثة أعداد التى تظهر فى العبارة . وعلى ذلك إذا وضعت ن = ١ فى ا ن^{٢} + ب ن + حـ ستحصل على الجواب ا + ب + حـ .

بنفس الطريقة ستجد أن نتيجة وضع ن = . هى إعطاء العدد الثالث فقط .

فمثلا عندما ن = . تصبح العبارة (٤ن^{٢} + ١٧٣ن + ٤٥) = ٤٥

وعندما نعوض ن = . ، يأخذ المقدار ا $ن^٢$ + ب ن + حـ القيمة حـ .

وستجد أيضاً أن نتيجة تعويض ن = ٢ هى أن يكون لديك ٤ مرات العدد الأول فى العبارة + مرتان العدد الثانى فى العبارة + العدد الثالث فى العبارة .

وبالاختزال النتيجة هى ٤ ا + ٢ ب + حـ

أوجد بنفسك ما تحصل عليه عندما تضع ن = ٣ أو ن = ٤ أو ن = ٥ .

إذا وجدت صعوبة كبيرة فى هذا الباب فحاول أن تتصل بمهندس وهو سيقول لك ما يفعله عندما يستخدم قانوناً لمسألة عملية . والجزء الأول فى الباب الثامن قد يساعدك أيضاً على رؤية كيف يستخدم قانون فى الحياة العملية . ولن تقابلنا مسائل شبيهة بالسؤال السادس إلا فى نهاية الباب الثامن عند دراسة « حساب الفروق المحدودة » .

الباب الثامن

طرق الإكثار

« عندما يؤخذ فى الاعتبار الأهمية البالغة لاستخدام الصيغ الرياضية فى مجال واسع من المهن ، من السباكة إلى صناعة البوارج الحربية ، فلن تكون هناك مبالغة على الإطلاق إذا قلنا إن سهولة استخدام الصيغ الرياضية ، وتفسيرها وتطبيقها هو أحد الأمور المهمة التى ينبغى على الدراسة المبكرة للرياضة أن تنظر لها كهدف » .

ت . برسى نن — تعليم الجبر

نهتم فى كثير من الأحيان بمعرفة السرعة التى ينمو بها شىء . إذا كان ارتفاع إحدى ناطحات السحاب ضعف ارتفاع ناطحة سحاب أخرى فلا بد أن يكون هيكلها أقوى بحيث يمكنه احتمال الوزن الزائد ستتكلف الأولى أكثر من ضعف ما تتكلفه الثانية فى بنائها . كم مرة تزيد تكاليف الأولى على الثانية ؟ أربع مرات ؟ ثمانى مرات ؟

كلما تقدم جيش فى أرض معادية ازدادت صعوبة إحضار

المؤن والمحافظة على الاتصال . فالتوغل مسافة ١٠٠٠ ميل يحتاج إلى عدد من سيارات النقل أكثر من عشرة أمثال ما يحتاج إليه التوغل مسافة مائة ميل : ولكن كم ؟

إذا كنت تراقب الحرائق من سطح منزل فقد تحتاج لأن تقفز عند الضرورة . هل الخطر فى القفز من ارتفاع ٤٠ قدماً ضعف خطر القفز من ارتفاع ٢٠ قدماً ؟ أو أكثر من الضعف ؟ أو أقل من الضعف ؟

إذا كانت إحدى ربات المنازل تشترى خشباً للمدفأة ودفعت ستة قروش لحزمة محيطها قدم، فكم تدفع لحزمة محيطها ست بوصات.

فى جميع هذه الأسئلة نهتم بالطرق المختلفة التى يتكاثر بها شىء . وقد يكون الجواب مهماً بالنسبة لأغراض عملية . أى شخص يحاول بناء المساكن بطريقة اقتصادية عليه أن يعرف الإجابة عن السؤال الأول : وإلا فقد يجد أن مايوفره فى شراء الأرض ينفق بأكمله فى التكاليف الزائدة لمواد البناء .

وأيضاً ، كثير من الناس الذين كان من المحتمل أن يكونوا مكتشفين خاب أملهم نتيجة لجهلهم بتأثيرات التغير فى المقياس . اكتشف كثير من الناس فى الماضى محركات للطيران وصنعوا بنجاح نماذج صغيرة طارت طيراناً جيداً . ثم عملوا على تكبير

النموذج وبنوا طائرة بحجم كبير ، ولكنها لم تطر على الإطلاق . السبب هو أن وزن الآلة والقوة الرافعة يتغيران بطريقتين مختلفتين تماماً . إذا تمكن إنسان من تصميم برغوث مكبر بحجم الفيل فإن حركاته ستكون مختلفة تمام الاختلاف عن حركات برغوث حقيقي ، كما يمكنك أن تتخيل .

وعلى ذلك فهو أمر طبيعي أن يتوقع المهندسون والعلماء من الرياضيين أن يمدوهم بطريقة بسيطة لكتابة الأسلوب الذى تنمو به أية كمية .

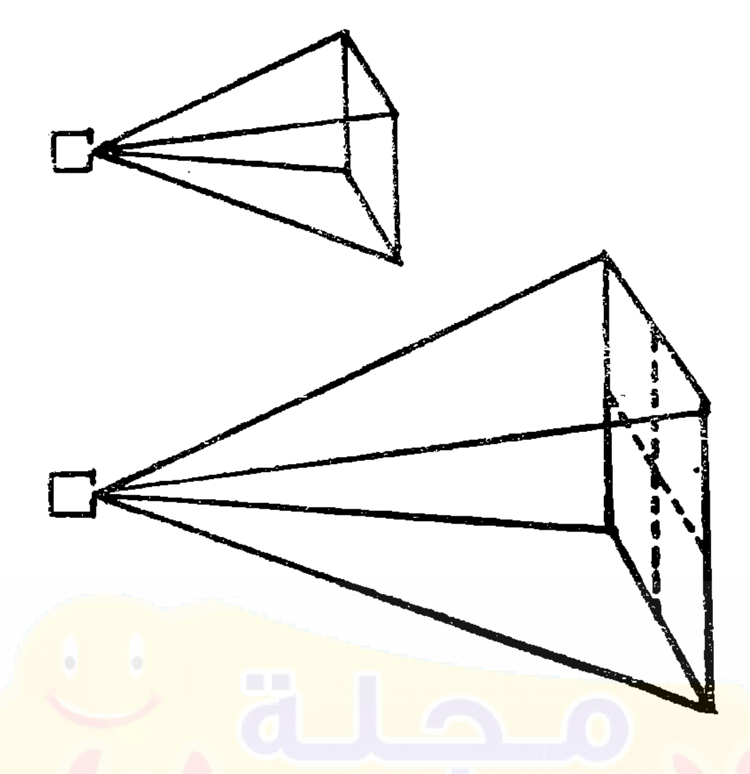
وبالطبع ، تنمو الأشياء بطرق كثيرة مختلفة ، إذا اعتبرنا مثلا تعداد سكان مدينة ما نشستر فى المائة والخمسين عاماً الماضية فهذه كمية تغيرت بطريقة معقدة للغاية . يمكن لرياضى أن يدرسها وأن يصفها ، ولكن يجب ألا تنتظر أن يكون الوصف مختصراً جداً وبسيطاً . سيدخل فى الوصف كثير من الأشياء ، الثورة الصناعية ، التقلبات فى تجارة القطن ، هجرة الأطفال فى وقت الحرب ، وهكذا . ومن ناحية أخرى ، تتغير بعض الأشياء بطريقة بسيطة جداً سنعطى أمثلة فيما بعد . وبين هذين الحدين المتطرفين يوجد عدد كبير من أنواع النمو التى يمكن دراستها وكتابتها بدرجات متفاوتة الصعوبة . يجب ألا تتوقع من الرياضة أن تجعل من مسألة معقدة مسألة بسيطة قد تساعدنا الرياضة على

اكتشاف الأسباب الجذرية للأشياء، ولكن إذا كانت الأسباب كثيرة ومتداخلة فإن الوصف الرياضى لن يكون بسيطاً هو الآخر . وسندرس هنا فقط بعض الحالات البسيطة فلا تقع فى خطأ الفرض بأن كل مسألة مهما كانت معقدة يمكن ضغطها إلى هذه الصور البسيطة .

أبسط صورة للنمو

سعر أية سلعة تشترى بالياردة هو مثال على علاقة بسيطة . إذا كان سعر الياردة من شريط هو قرشان فإن ثمن ياردتين أربعة قروش ، وثمن ياردات عددها س هو ٢ س قرشا . إذا كانت ث تمثل ثمن س من الياردات بالقروش فإن ث = ٢ س .

يمكن جعل هـــذا القانون عاما بدرجة أكبر . ليس من الضرورى أن يكون سعر الياردة من الشريط قرشين . افرض أن سعر الياردة هو ا من القروش حيث من الممكن أن يكون ا أى عدد . على ذلك يعطى ثمن ياردات عددها س بالعلاقة : ث = ا س . نحن نفترض أن ثمن كل ياردة لا يتوقف على عدد الياردات المشتراة : لن يوجد تخفيض فى السعر تبعا للكمية . ننص على ذلك بلغة الرياضة بأن نقول أن ا ثابت . مثل هذه العلاقات



حيز ستارة السينما

فى الشكل السفلى الستارة تبعد عن مصدر الضوء ضعف ما تبعد عنه الستارة فى الشكل العلوى .عرض الستارة السفلى ضعف عرض العليا وكذلك طولها ضعف طول العليا .
الخطان المتقطعان يبينان أن الستارة السفلى يمكن أن تقسم إلى أربع ستائر كل منها بحيز الستارة العليا

مألوف فمثلا يرتبط محيط م وقطر دائرة (ق) . بالعلاقة م = ٣,١٤ ق ، أيضاً فى الميزان الزنبركى يمتد الزنبرك مسافة تتناسب مع الوزن المعلق فيه إذا كان الرطل الواحد يسبب استطالة ل بوصة ،

فإن أرطال عددها س ستسبب استطالة قدرها س ل بوصة . اكتشف هوك هذه الحقيقة حوالى سنة ١٦٦٠ . درس هوك خصائص الزنبرك نتيجة لعمله فى صناعة الساعات . وكان اختراعه لعجلة الميزان التى يستبدل فيها ببندول الساعة زنبركا شعريا ، كان هذا الاختراع نتيجة عملية لدراساته . وقانون هوك لا يكون صحيحا إلا للأوزان الصغيرة نسبيا . الوزن الثقيل سيجعل الزنبرك يستطيل استطالة كبيرة : عند رفع الوزن لن يعود الزنبرك لطوله الأصلى .

ستجد فى جميع فروع الرياضيات والعلم والهندسة قوانين من النوع ا س .

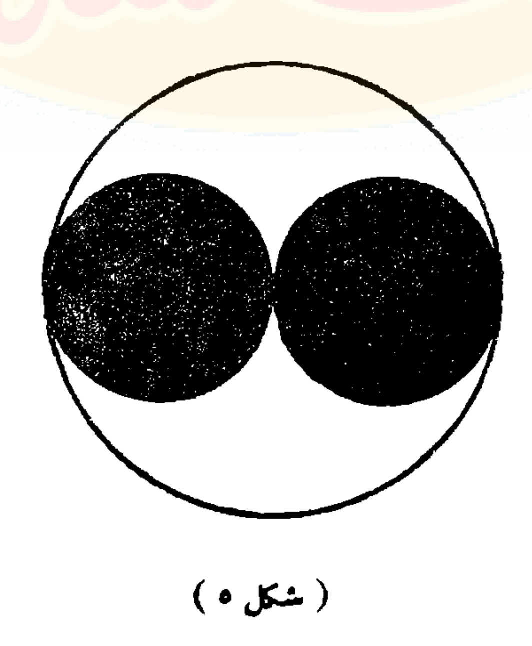
قوى س

يقابلنا نوع آخر من النمو عندما يزاح جهاز إسقاط سينمائى أو فانوس سحرى ، بعيداً عن الستارة فإن الصورة ستشغل حيزاً يساوى أربعة أمثال لا ضعف الحيز الأول . إذا جعلت البعد ثلاثة أمثال البعد الأول فإن الحيز سيصبح تسعة أمثاله .

القاعدة واضحة : ٤ هى ٢ × ٢ أو ٢ ^{٢} ، ٩ هى ٣ × ٣ أو ٣ ^{٢}. إذا وضعنا الفانوس على بعد يساوى ن من المرات البعد الأول فإن مساحة الصورة تصبح ن ^{٢} من المرات قدر المساحة الأولى .

بنفس الطريقة إذا كبرنا صورة أو خريطة ن من المرات فإنه يلزمنا ورقا . مساحته $ن^٢$ من المرات مساحة الصورة أو الخريطة قبل التكبير .

وعلى ذلك لدينا الآن الإجابة عن السؤال الخاص بخشب المدفأة . الحزمة المربوطة بحبل طوله ١٢ بوصه تحتوى على أربعة أمثال ما تحتويه الحزمة المربوطة بحبل طوله ست بوصات يمكنك أن ترى أن الحزمة الكبرى يجب أن تحتوى على أكثر من ضعف المقدار الذى تحتويه الحزمة الصغرى وذلك بالنظر إلى شكل ٥ . الجزء المظلل يمثل حزمتين صغيرتين : الدائرة الكبيرة تمثل حزمة كبيرة واحدة .



(شكل ٥)

إذا ألقى حجر من أعلى برج ، ستجد أنه يسقط حوالى ١٦ قدما فى الثانية الأولى و ٦٤ قدماً فى الثانيتين الأولى والثانية ، ١٤٤ قدما فى الثوانى الثلاثة الأولى .

يمكن التعبير عن هذه النتائج بواسطة القانون الذى ينص على أنه فى س من الثوانى يسقط الحجر حوالى ١٦ س^{٢} قدماً . وعلى ذلك ففى ٥ ثوان سيسقط الحجر ١٦ من المرات ٢٥ = ٤٠٠ قدم . إذا أمكنك أن تتذكر هذا القانون وكان معك ساعة فمن السهل معرفة ارتفاع برج أو عمق بئر بإسقاط حجر وملاحظة عدد الثوانى التى يستغرقها للوصول إلى القاع .

ويعطى قانون آخر السرعة التى يصل بها الحجر إلى القاع . هذا القانون هو ع^{٢} = ٦٤ ل . فى هذا القانون ل هو ارتفاع البرج بالقدم ، ع هى السرعة بالقدم فى الثانية التى يصل بها الحجر إلى نهاية مرحلته ، وإذا كان إرتفاع البرج هو ١٠٠ قدم فإن ل يساوى ١٠٠ وبالتالى فإن ع^{٢} = ٦٤٠٠ ع = ٨٠ . للحصول على ضعف هذه السرعة يجب أن يكون ارتفاع البرج أربعة أمثال ارتفاعه فى هذا المثال . (وهذا يعطى الإجابة عن السؤال الخاص بمراقبة الحرائق) . من السهل تحويل سرعة ٣ أقدام فى الثانية إلى أميال فى الساعة وستجد أنها تساوى تقريبا ميلين فى الساعة . أى أن ٨٠

قدماً فى الثانية هى حوالى ٥٣ ميلا فى الساعة : القفز من سطح منزل ارتفاعه ١٠ أقدام يعادل فى خطره خطر التصادم مع سيارة تسير ٥٣ ميلا فى الساعة .

يمكننا بنفس الطريقة أن نناقش طريقة النمو التى يمثلها س ٣ ستحتاج إلى ثمانية مكعبات من السكر لعمل مكعب واحد أبعاده ضعف أبعاد المكعب العادى . ولعمل مكعب أبعاده تساوى س من المرات الأبعاد العادية يلزمك س ٣ من المكعبات العادية . إذا كبرت أى جسم س من المرات ، ليس من الضرورى أن يكون مكعباً ، فإنك تضرب المادة التى يحتويها فى س ٣ :فمثلا إذا ضاعفت جميع أبعاد درج ، أو صندق ، أو حقيبة ، فإنك تضرب الحيز الذى يمكنك ملأه فى ٨

عند تكبير نموذج لأى جسم ، قد تتضمن العملية جميع هذه الأنواع المختلفة للنمو . افرض للبساطة ، أن لدينا صندوقا على هيئة مكعب ، مصنوع من الورق المقوي . إذا كان طول ضلع المربع هو قدما واحدا فإن سعة الصندوق ستكون قدماً مكعبه واحدة وستكفى ست أقدام مربعة من الورق المقوى لعمله ، ويمكن إحاطته بحبل طوله أربع أقدام . إذا صنعنا بدلا من هذا الصندوق ، صندوقا آخر مكعب الشكل طول ضلعه ٢ قدم سنجد

أن سعته تساوى ثمانية أمثال سعة الصندوق الأول ، وأنه يلزم فقط لصنعه أربعة أمثال الورق المقوى اللازم لصنع الصندوق الأول، ولربط حبل طوله يساوى ضعف طول الحبل اللازم لربط الصندوق الأول . . . وضع البضائع فى صناديق كبيرة أرخص من وضعها فى صناديق صغيرة بشرط ألا ينفجر الورق المقوى .

من السهل أن نرى لماذا كانت نتائج مخترعى الطيارات الأول مخيبة للرجاء عندما حاولوا تكبير مقاييس نماذجهم . إذا ضوعفت الأبعاد فإن الوزن يضرب فى ٨ ولكن الأجنحة تضرب فى ٤ فقط .

تظهر س ، س^{٢} ، س^{٣} بطريقة طبيعية عندما نعتبر التغييرات فى المقاييس للنماذج وفى تطبيقات أخرى ، تستخدم س^{٤} ، س^{٥} س^{٦} ، وهكذا .

فمثلا الحدافة ، هى جهاز مألوف لتخزين الطاقة . افرض أننا صنعنا حدافتين بقطع قطع دائرية من صفيحة معدنية — قطر إحدى الدائرتين ضعف قطر الآخرى . افرض أن كلا من الحدافتين تدور بنفس المعدل — دورة واحدة فى الثانية مثلا . هل سيكون للحدافة الكبرى ضعف ، أو أربعة أمثال أو ثمانية أمثال طاقة الحدافة الصغرى ؟ لا .. تبين التجربة أن طاقة الحدافة

الـكبرى هى ١٦ مرة طاقه الحدافة الصغرى ؟ ، أى ٢^٤ من طاقة الحدافة الصغرى . إذا كبرنا نصف القطر س من المرات فإننا تزيد الطاقة س^٤ من المرات . يمكن جعل محركات الطائرة تبدأ فى معمل بواسطة حدافة . تصنع الحدافة بحيث تدار باليد، ثم توصل فجأة بمحرك الطائرة . إذا كنت تستعمل الحدافة الـكبرى التى ذكرناها فيما سبق، سيكون تحت تصرفك طاقة قدرها ١٦ مرة من الطاقة التى تحت تصرف رجل يستخدم الحدافة الصغرى ، وحيث إن الزمن الذى يلزمك لدوران حدافتك يساوى ١٦ مرة الزمن اللازم للرجل الآخر فستحصل على صورة حية لمعنى ٢^٤ ؟ .

إذا أنت ضاعفت قطر الحدافة وأيضا سمك المعدن ، فإنك تضرب الطاقة فى ٢^٥ أو ٣٢ . فى هذه الحالة الحدافة الـكبرى هى ضعف الصغرى فى جميع الاتجاهات . تأثير تـكبير حدافة س من المرات فى جميع الاتجاهات هو زيادة طاقتها (بسرعة معينة أو دوران معين) س^٥ من المرات .

تسمى س ، س^٢ ، س^٣ ، س^٤ ، س^٥ القوى الأولى والثانية والثالثة والرابعة والخامسة للعدد س بدلا من ٢، ٣ ، ٤ أو ٥ يمكن أن نأخذ أى عدد آخر . باستعمال ن كاختصار «لأى عدد» يمكننا أن نقول إن س^ن هى القوة النونية للعدد س .

وقد تظهر قوى س مع بعضها البعض ومع ثوابت . فمثلا قد

يطلب نادى للتنس ٥ شلن كرسم دخول، وشلنا واحدا عن كل يوم يلعب فيه العضو فعلا خلال الموسم. وعلى ذلك فإن تكاليف لعب يوم واحد سيكون ٦ شلن وتكاليف لعب يومين ٧ شلن، وتكاليف اللعب س من الأيام (٥ + س) شلن.

أيضا، إذا قذفت كرة رأسيا إلى أعلى بسرعة ٤٠ قدماً فى الثانية فإن ارتفاعها بعد مرور س من الثوانى يعطى بالعبارة ١٠ س — س^{٢} قدما. (استخدمنا أرباع الثوانى بدلا من الثوانى بغرض تبسيط الأعداد، ولأن الكرة تظل زمنا طويلا فى الهواء.) يمكننا عمل جدول كما يلى :

عدد أرباع الثوانى	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
الارتفاع بالقدم	٠	٩	١٦	٢١	٢٤	٢٥	٢٤	٢١	١٦	٩	٠

الحص مجموعة الأعداد الموجودة فى الصف السفلى من هذا الجدول. ستلاحظ أن نفس الأعداد تظهر من اليمين ومن اليسار هل تلاحظ أى شىء آخر بالنسبة لها ؟

أكتب التغير بين كل عدد والعدد التالى :

الأعداد	٠	٩	١٦	٢١	٢٤	٢٥	٢٤	٢١	١٦	٩	٠
التغيير		٩	٧	٥	٣	١	—١	—٣	—٥	—٧	—٩

توجد قاعدة بسيطة جداً يمكن ملاحظتها بالنسبة لهذه المجموعة

من الأعداد : كل عدد يقل بمقدار ٢ عن العدد السابق له . ويرجع ذلك إلى الجذب العكسى المنتظم الذى تؤثر به الجاذبية الأرضية على الكرة . فى فترات الربع ثانية الأولى ترتفع الكرة ٩ أقدام ولكن سرعتها تتناقص باستمرار خلال هذا الوقت . فى الفترة الثانية ، تقطع الكرة ٨ أقدام فقط ، وفى الثالثة ٥ أقدام وهكذا . فى الفترة الخامسة ترتفع الكرة إلى قدم واحد، (كما هو المعتاد + ١ يعنى قدما واحدة إلى أعلى ، — ١ يعنى قدما واحدة إلى أسفل .) والآن تسقط الكرة بسرعة متزايدة ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٩ أقدام فى فترات متتالية :

يمكننا أن نستمر فى كتابة مثل هذه الصفوف من الأعداد ، كل صف يعطى التغيرات فى الصف الذى أعلاه . بهذه الطريقة نحصل على الجدول الآتى :

جـــدول ١

٠	٩	١٦	٢١	٢٤	٢٥	٢٤	٢١	١٦	٩	٠
	٩	٧	٥	٣	١	—١	—٣	—٥	—٧	—٩
		—٢	—٢	—٢	—٢	—٢	—٢	—٢	—٢	—٢
			٠	٠	٠	٠	٠	٠		
				٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠

جميع الأعداد فى الصف الثالث هى — ٢ . لا يوجد تغير

عند الانتقال من عدد لآخر وبالتالى فإن جميع الأعداد فى الصف الرابع هى أصفار . يمكن أن تستمر فى هذه العملية إلى أى مدى ترغب فيه : كل ما ستحصل عليه هو عدد آخر من الأصفار فى الصف الخامس والسادس والصفوف التالية .

فلنجرب هذه العملية على بعض العبارات الأخرى التى قابلتنا من قبل . إذا كتبنا الأعداد التى تناظر س^{٢} نحصل على :

جـــدول ٢

١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦	٤٩	٦٤	٨١
١	٣	٥	٧	٩	١١	١٣	١٥	١٧
٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	
٠	٠	٠						

إذا حاولنا س^{٣} نجد :

جـــدول ٣

١	٨	٢٧	٦٤	١٢٥	٢١٦	٣٤٣	٥١٢
١	٧	١٩	٣٧	٦١	٩١	١٢٧	١٦٩
٦	١٢	١٨	٢٤	٣٠	٣٦	٤٢	
٦	٦	٦	٦	٦	٦		
٠	٠						

حاول أنت حالتي $س^٤$ ، $س^٥$ كون عبارات مثل :
$٢س + ٣$ ، $س^٢ + ٥س + ٧$ وحاول نفس الشيء بالنسبة لها . ستجد دائماً أنك بعد عدد معين من الصفوف ستحصل على أصفار . ما هي القاعدة التي تعطى عدد الصفوف التي تظهر قبل الوصول إلى الأصفار ؟ جواب هذا السؤال معطى فيما بعد . ولكن حاول أن تصل إليه أنت . أجر العملية بالنسبة لعدد كبير من الأمثلة : قسم الأمثلة إلى مجموعات ، الأمثلة التي لها صف واحد ثم أصفار معا ، والتي لها صفان معا وهكذا . القاعدة هي في الواقع قاعدة بسيطة .

الدوال الأسية

لقد رأينا أن أي عبارة مكونة من قوى س ستؤدى عند مرحلة معينة إلى صفوف من الأصفار وذلك عند إجراء العملية السابق شرحها .

هذه الصفة غير موجودة في جميع طرق النمو : في الواقع العبارات الوحيدة التي تتصف بهذه الصفة هي تلك التي تتكون من قوى س .

إذا حاولت إحدى القواعد الأخرى ، ستتحقق بسرعة من

صحة هذا الكلام . خذ مثلا مجموعة الأعداد : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ٣٢ ، ٦٤ ، ١٢٨ ، ... إلخ حيث كل عدد هو ضعف سابقه . هذه المجموعة تناظر الصيغة ٢ س (تذكر أننا نبدأ بالقيمة س = ٠ ، إذا كان مبلغاً من المال يضاعف نفسه كل سنة ، وهى نسبة ربح عالية ، فإن ١ جنيه يصبح ٢ جنيه بعد عام ، ٤ جنيه بعد عامين ، ... إلخ . وبعد س من الأعوام يصبح ٢^س .) إذا عملنا جدولا لهذه المجموعة من الأعداد ، وذلك باستخدام نفس الطريقة السابقة ، نحصل على :

١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	١٢٨	
١	٢	٤	٨	١٦	٣٢	٦٤	.	....
١	٢	٤	٨	١٦	٣٢			....

كل صف يطابق الصف الذى يسبقه تماماً ! ومهما استمر الإنسان فى هذه العملية فلن يقابله صف جميعه أصفار أبداً .

حاول ٣^س . هذه الصيغة تعطينا الجدول :

١	٣	٩	٢٧	٨١	٢٤٣	....
٢	٦	١٨	٥٤	١٦٢		....
٤	١٢	٣٦	١٠٨			....

فى هذه الحالة كل صف هو ضعف الصف الذى يسبقه

ومهما استمررت فى العمل فلن يقابلك صف كله أصفار .

تسمى $٢^{س}$ ، $٣^{س}$ دوال أسية . إذا استخدمنا ا كاختزال للدلالة على « أى عدد » $ا^{س}$ هى دوال أسية .

حساب الفروق المحدودة (الاستكمال)

نرغب فى كثير من الأحيان فى معرفة القاعدة التى تتكون بها مجموعة معينة من الأرقام . قد يجد مهندس ، بالتجربة ، الضغط اللازم لكى تنفجر المراجل المصنوعة من ألواح معدنية يختلف سمكها . إذا تمكن من التعبير عن نتائجه على صورة قاعدة بسيطة فإن ذلك يكون مفيداً لغيره من المهندسين . قد يقيس عالم ارتفاع نبات يومياً ويحاول أن يجد القاعدة التى ينمو بها النبات .

يختص جزء كبير من العلم بمحاولة إيجاد القواعد بدراسة نتائج التجارب .

عندما تعتمد كمية على أخرى ، يقال إنها دالة للكمية الثانية . فمثلا الضغط الذى عنده ينفجر المرجل يتوقف على سمك جوانبه . إذا سمينا الضغط ض والسمك س ، نقول إذن ض دالة فى س ، ويمكن كتابة الضغط اللازم لانفجار جوانب سمكها س على

الصورة ض (س) . وعلى ذلك فإن ض (٢) سيعنى الضغط اللازم لانفجار مرجل مصنوع من معدن سمكه ٢ بوصة ، ض ($\frac{٣}{٨}$) الضغط اللازم لانفجار مرجل سمك جوانبه $\frac{٣}{٨}$ بوصة . وطبعاً ، نحن نفترض أن تصميم المرجل هو نفسه فى كل حالة وأن نفس المعدن يستخدم فى جميع التجارب .

بنفس الطريقة ، إذا رمزنا إلى « عدد الأيام » بالرمز س وإلى ارتفاع النبات بالبوصات بالرمز ص ، فإن ص دالة فى س ، ص (١٧) ستعنى ارتفاع النبات بعد ١٧ يوماً : ص (س) هو الارتفاع بعد أيام عددها س .

إذا قلنا « ماهى الدالة بين س ، ص » فنحن نعنى بأية قاعدة خاصه تربط ص مع س » ؟ .

يستخدم هذا السؤال فى اختبارات الذكاء . تعطى للطفل الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ثم يسأل « ما العدد التالى ؟ طبعاً هو ٦ . وقد يعطى طفل أكبرسنا الأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، وينتظر منه أن يعرف أن العدد التالى هو ١٠ .

مثل هذه الحالات البسيطه يمكن الإجابة عنها بدون أية طريقة خاصة . ولكن افرض أن الجدول التالى أعطى لك .

س	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
ص	١	٣	٨	١٣	٢١	٣١	٤٣	٥٧	٧٣	٩١	١١١

كيف نجد العدد ص الموجود فى الصف الثانى المناظر لأى عدد س فى الصف الأول ؟ قد يغفر لطفل إذا هو أعطى الأعداد ١ ٣ ٧ ١٣ ٢١ ٣١ ولم يستطيع معرفة أن العدد التالى هو ٤٣ ، ولكن طريقة كتابة التغير بين كل عدد والتالى له تعطينا دليلا للإجابة بسرعة سيكون لدينا الجدول .

جـــدول ٤

١	٣	٧	١٣	٢١	٣١	٤٣	٥٧	٧٣	٩١	١١١
٢	٤	٦	٨	١٠	١٢	١٤	١٦	١٨	٢٠	
٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢	٢		
٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠	٠			

لدينا أصفار فى الصف الأخير : لابد أن تكون الصيغة بسيطة ولا تحتوى إلا على قوى س .

ولكن كم قوى من قوى س سنحتاج إليها ؟ هل سنضطر لإدخال $س^٥$ كما كان ذلك ضروريا فى حالة الحداقة ؟ أم لن يكون من الضرورى الذهاب إلى هذا الحد ؟

ربما تكون قد اكتشفت الإجابه عن السؤال الذى أعطيناه فيما قبل . إذا كنت لم تستطع ، فالإجابة هى ما يلى . أى عبارة مثل ٢ س + ٣ ، لا تحتوى على قوى س أعلى من س ، تعطى صفين من الأعداد ، ثم أصفارا بعد ذلك . إذا أدخلت $س^٢$ - كما فى $٥س^٢ + ٣ س - ٢$ ، مثلا سيكون لدينا ثلاثة صفوف ثم

أصفار . إذا ظهرت $س^3$ فى العبارة ، سنحصل على أربعة صفوف ثم أصفار ، وهكذا إذا احتوت العبارة على $س^ن$ سيكون لدينا صفوف عددها (ن + ١) قبل أن تظهر الأصفار . والسير بطريقة عكسية فى هذه العملية صحيح أيضاً إذا كانت لدينا أربعة صفوف قبل ظهور الأصفار فمن الممكن إيجاد صيغة لاتحتوى على قوة أعلى من $س^3$. إذا كان لدينا صفوف عددها (ن + ١) فإن الصيغة ستحتوى على قوى س حتى $س^ن$.

سيساعدنا ذلك على إيجاد الصيغة التى تعطينا الأعداد ١ ، ٢ ، ٧ ، ١٣ ، .. إلخ هذه الأعداد تؤدى ، كما رأينا حالا ، إلى جدول يحتوى على ثلاثة صفوف فقط . لا يمكن أن تحتوى الصيغة على أية قوة من قوى س أعلى من $س^2$. يكفينا أن نأخذ $س^2$ عدداً معيناً من المرات ، س عدداً معيناً من المرات ، ونضيف إليها عدداً ما . ستأخذ الصيغة صورة $ا س^2 + ب س + حـ$ بطريقة الاختزال الجبرى ، حيث ا هو عدد المرات $س^2$ ، وعدد مرات س ، حـ يدل على العدد المضاف . (وعلى ذلك فنى الصيغة : $٥ س^2 + ٣ س - ٢$ ، ا هو ٥ ، ب هو ٣ ، حـ هو - ٢) . لانعلم حتى الآن القيم التى يجب أن تأخذها ا ، ب ، حـ . كل مانعلمه هو إمكان الحصول على الصيغة الصحيحة باختيار القيم المناسبة لكل من ا ، ب ، حـ . وهذه بالطبع مساعدة كبيرة لنا . عندما

بدأنا النظر فى المسألة كان علينا أن نتوقع أية صيغة : قد تكون هذه الصيغة س + ٢^س أو س^٩ أو عبارات أسوأ من ذلك .

بمجرد أن نعرف أن الصيغة هى من النوع ا س^٢ + ب س + حـ يصبح من السهل للغاية معرفة قيم ا ، ب ، حـ . نحن نعلم أن الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٣ ، ... إلخ تنتج إذا نحن غيرنا س فى الصيغة الصحيحة بالأعداد ٠ ، ١ ، ٢ ، ٣ ، ... إلخ على التوالى . إذا غيرنا س فى الصيغة ا س^٢ + ب س + حـ بالعدد صفر نحصل على حـ . وإذا غيرنا س بالعدد ١ نحصل على ا + ب + حـ وإذا غيرنا س بالعدد ٢ نحصل على ٤ ا + ٢ ب + حـ . (إذا شئت يمكنك تغيير بهذه النتائج كلاماً وذلك بقراءة ٤ ا « أربع مرات العدد الذى يأتى مع س^٢ فى الصيغة » ، وهكذا) .

يمكننا الآن مقارنة هاتين المجموعتين من النتائج إذا كانت ص تعطى بالصيغة ا س^٢ + ب س + حـ ، فإن ص (٠) = حـ ولكن ص (٠) ، أى قيمة ص التى تناظر س = ٠ هى ١ . لابد أن يكون حـ = ١ . كما نحصل من الصيغة على ص (١) = ا + ب + حـ . ولكن ص (١) = ٣ ، وعلى ذلك فيجب اختيار ا ، ب ، حـ بحيث يكون ا + ب + حـ = ٣ . بنفس الطريقة ، بمقارنة صيغة (٢) بما يجب أن تعطيه ، نحصل على المعادلة : ٤ ا + ٢ ب + حـ = ٧ . لدينا الآن ثلاث معادلات .

$$ح = ١$$

$$١ + ب + ح = ٣$$

$$٤١ + ٢ب + ح = ٧$$

هذه المسألة مماثلة تماماً لمسألة الكعك والشطائر وفنجان القهوة ، ويمكن حلها بسهولة باستخدام الطريقة المشروحة فى الباب السابع ، وتؤدى إلى النتيجة ا = ١، ب = ١ ، ح = ١ وبالتالى نحصل على الصيغة ص = س^{٢} + س + ١ . هذه هى القاعدة التى وجدت على أساسها أعداد الجدول .

فى الموضوع المعروف باسم حساب الفروق المحدودة ، أو حساب الاستكمال ، طورت الطريقة التى أعطيناها فيما سبق وبرهن على صحتها .

وقد وجد من المناسب إدخال بعض الاختصارات . كان علينا أن نشير باستمرار إلى « الصف الثانى فى الجدول » ، « الصف الثالث » وهكذا . لتجنب ذلك استخدمت علامات معينة كأسماء لهذه الصفوف . الصف الأول (الذى كان يحتوى فى المثال الأخير على الأعداد ١ ، ٣ ، ٧ ، ١٣ ، ...) سميناه ص فعلا . الصف الثانى (الأعداد ٢ ، ٤ ، ٦ ، ٨ ، ... فى ذلك المثال) يسمى △ ص . العلامة △ هى اختصار الجملة

« التغير فى » . وحيث إن كل صف يمثل التغيرات التى تحدث فى الصف السابق له ، فإننا نضيف علامة أخرى △ كلما انتقلنا إلى صف آخر . فمثلا الصف الثالث يمثل التغيرات فى △ ص ، ويمكن كتابته △ △ ص . لاحظ أن △ لا ترمز لعدد ما كما هو الحال مع ا ، ب والحروف الأخرى . △ ترمز « للتغير فى » — وليس إلى أى شىء آخر . ويمكن تغيير هذه العلامة بهذه الكلمات دائماً . وعادة تختصر △ △ ص مرة أخرى إلى $△^{٢}$ ص . وهذا الاختصار يكون مناسباً على الخصوص عندما يتضمن العمل عدداً كبيراً من العلامات △ . فمثلا $△^{٥}$ ص هى أنسب بكثير من △ △ △ △ △ ص كاختصار للأعداد الموجودة فى الصف السادس .

وفى بعض الأحيان نرغب فى الإشارة باختصار إلى عدد خاص فى أحد الصفوف . لقد استخدمنا فعلا العلامة ص (س) لوصف العدد الموجود فى الصف الأول والذى يناظر القيمة س وعلى ذلك فالأعداد الموجودة فى الصف الأول هى ص (٠) ، ص (١) ، ص (٢) ، ص (٣) وهكذا نستخدم علامات مشابهة للأعداد الموجودة فى الصفوف التالية . الأعداد فى الصف الثانى تسمى △ ص (٠) ، △ ص (١) ، △ ص (٢) وهكذا ، والتى فى الصف الثالث $△^{٢}$ ص (٠) ، $△^{٢}$ ص (١) ،

$\triangle^2$ ص (٢) إلخ وهكذا بالنسبة إلى أى صف .

ستجد هذه العلامات فى أى كتاب على حساب الفروق المحدودة . وهى تبدو غريبة لأول وهلة ، ولكن بمجرد أن تتعود عليها ، وتتحقق من أن $\triangle^2$ ص (١) لا تعنى أى شيء مخيف أكثر من « العدد الثانى فى الصف الثالث » فى جدول مثل جدول ٣ أو جدول ٤ ، ستجد أن الموضوع موضوع جيد للمجادلة فيه . يمكنك أن تحاول المسائل الآتية :

١ – مرت سيارة بأحد أعمدة الإضاءة . وبعد ثانية واحدة كانت تبعد عن العمود مسافة ٣ ياردة ، وبعد ثانيتين ١٠ ياردة ، وبعد ثلاثة ثوان ٢١ ياردة ، وبعد أربعة ثوان ٣٦ ياردة . ما بعد السيارة عن العمود بعد $\frac{1}{2}$ ثانية ، وبعد $1\frac{1}{2}$ ثانية ، وبعد $2\frac{1}{2}$ ثانية ؟ هل تزداد سرعة السيارة أم هى آخذة فى الإبطاء ؟

٢ – ما هو العدد الناقص فى المجموعة الآتية ؟

٣ ، ٤ ، ... ، ٢٤ ، ٤٣ ، ٦٨

إذا نجحت فى الحصول على العدد الصحيح ، فإن جدول $\triangle$ ص ، $\triangle^2$ ص إلخ سيوضح تماماً صحة جوابك . لن يكون لديك أى شك ما دمت اخترت العدد الصحيح . ويجب أن يكون هذا العدد أحد الأعداد بين ٥ ، ٢٣ . يمكنك أن تحاول جميع هذه الأعداد إذا لم يكن هناك بد من ذلك .

من الممكن عمل جدول مشابه لجدول ٤ إذا فرضنا أن الصف الأول ، ص ، يحتوى على أى مجموعة من الأعداد . فى الواقع يمكننا تمثيل الأعداد الموجودة فى الصف الأول برموز جبرية . افرض أن ا يمثل العددالأول (مهما كان هذا العدد) ، ب العدد الثانى ، حـ العدد الثالث ، ء العدد الرابع وهكذا . الصف ص يأخذ الآن الصورة .

ا ، ب ، حـ ، ء ، هـ ، و ، ...

كيف يكون الصف الثانى △ ص ؟ العدد الأول فى هذا الصف يبين التغير بين ا ، ب . نحصل على ذلك بطرح ا من ب ويمكن بالتالى كتابته ب — ا . بنفس الطريقة يمكن كتابة العدد الثانى حـ — ب . (اختبر بنفسك صحة هذا الكلام . فى جدول ٤ ما هى الأعداد ا ، ب ، حـ ؟ هل حقيقة يبدأ الصف △ ص بأعداد تساوى ب — ا ، حـ — ب ؟) الصف الثانى فى الحقيقة هو ب—ا ، حـ—ب ، ء—حـ ، هـ—ء ، و—هـ ، .. إلخ.

يمكن الحصول على الصف الثالث من الصف الثانى . العدد الأول فيه هو (حـ — ب) — (ب — ا) أو حـ — ٢ ب + ا

كما يبين الجبر البسيط . العدد الثانى فى هذا الصف هو
ى − ٢ حـ + ب .

بالاستمرار بهذه الطريقة ، نحصل على العبارات الموجودة فى جدول ٥

جدول ٥

ا ب حـ ى هـ

ب − ا حـ − ب ى − حـ هـ − ى

(حـ − ٢ب + ا) (ى − ٢حـ + ب) (هـ − ٢ى + حـ)

(ى − ٣حـ + ٣ب − ا) (هـ − ٣ى + ٣حـ − ب)

هـ − ٤ى + ٦حـ − ٤ب + ا

ستلاحظ أشياء معينة خاصة بهذا الجدول . تظهر مجموعة خاصة من الأعداد فى كل صف . فى الصف $\triangle^{4}$ص ، مثلا ، نجد الأعداد ١ ، ٤ ، ٦ ، ٤ ، ١ . فى الصف $\triangle^{3}$ص نجد الأعداد ١ ، ٣ ، ٣ ، ١ . فى الصف $\triangle^{2}$ص نجد ١ ، ٢ ، ١ ، وفى الصف $\triangle$ص نجد العددين ١ ، ١ فقط . (لم نهتم بإشارة هذه الأعداد سواء كانت إشارة + أم إشارة −) . ستلاحظ أن هذه الأعداد هى نفسها سواء قرئت من اليمين أو من اليسار . فمثلا ١ ، ٣ ، ٣ ، ١ هى نفسها سواء قرئت من اليمين أو من اليسار . ستلاحظ أن كلا

من العددين الأول والأخير فى جميع المجموعات هى العدد ١ . ما الذى تلاحظه بالاضافة إلى ذلك ؟ ما هى القاعدة التى تعطى العدد التالى للعدد الأول ؟ (أو العدد قبل الأخير) . هل يمكنك إيجاد الصيغة الخاصة بالعدد التالى لهذا العدد ؟ (سيلزمك أن تستمر فى عمل عدة صفوف أخرى فى جدول ٥ لكى تتمكن من القيام بذلك) . طبق الطريقة التى شرحناها فيما سبق لإيجاد الصيغة الخاصة بمجموعة من الأعداد .

تسمى هذه الأعداد بمعاملات مفكوك ذى الحدين . وقد تعرف الرياضيين على هذه الأعداد بنفس الطريقة التى تعرفت أنت بها عليها ، بملاحظة أنها ظهرت خلال العمل فمثلا تظهر هذه الأعداد عند إيجاد قيمة ١١^٢ ، ١١^٣ ، ١١^٤ . التى هى فى الواقع ١٢١ ، ١٣٣١ ، ١٤٦٤١ . (بعد هذه المرحلة يدخل النقل بعد العشرة فى الحساب ولن يوجد الارتباط البسيط . الأعداد فى △^٥ ص هى ١ ، ٥ ، ١٠ ، ١٠ ، ٥ ، ١ وطبعا العدد ١٠ لا يمكن أن يظهر كرقم واحد فى ١١^٥ . والواقع أن ١١^٥ هو ١٦١٠٥١ وإذا قرأت هذه الأرقام من اليمين فإنها تختلف عن قراءتها من من اليسار . وهذه الأعداد تظهر أيضاً فى (س + ١)^٢ ، (س + ١)^٣ ، (س + ١)^٤ ، إلخ . يمكننا كتابة هذه الأعداد فى جدول كالآتى :

جدول ٦

١	١					
١	٢	١				
١	٣	٣	١			
١	٤	٦	٤	١		
١	٥	١٠	١٠	٥	١	
١	٦	١٥	٢٠	١٥	٦	١
١	٧	٢١	٣٥	٣٥	٢١	١٧

والآن يمكنك أن تبحث عن مكانك بين الرياضيين العظماء كان هذا الجدول معروفا منذ عام ١٥٤٤ . وبالتدريج لاحظ الناس أنواعا كثيرة من الحقائق الغريبة عنه . ولكن بعد مضى ١٢٠ عاما أى فى سنة ١٦٤٤ تمكن أعظم رياضى انجليزى من ايجاد صيغة تعطى الأعداد فى كل عمود من أعمدة جدول ٦ العمود الأول واضح للغاية فهو دائما ١ العمود الثانى يحتوى على الأعداد ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ — وهو قانون بسيط ، ولكن ما هى القاعدة التى تعطى العمود الثالث ١ ، ٣ ، ٦ ، ١٠ ، ١٥ ، ٢١ ؟

* والواقع أن عمر الخيام وجد نفس الشيء . وقد شهد بذلك لانستون هوجبن فى كتاب الرياضة للمليون — المترجم .

ستجد أن هذه المسألة سهلة تماما إذ أنت استخدمت الطريقة المبينة من قبل فى هذا الباب ، أعمل جدولا على غرار الجداول ١ - ٤ ، ثم ابحث عن الصيغة .

القاعدة التى وجدها نيوتن (والتى أتمنى أن تجدها بنفسك) تعرف باسم نظرية ذات الحدين . هذا هو كل ما فى نظرية ذات الحدين قاعدة لكتابة الأعداد فى جدول ٦ .

الغرض من شرح △ ص ، △٢ ص ، إلخ للقارئ هو أنها ربما تساعدك على رؤية الكيفية التى تكشف بها النظريات ، وعلى أن تكشف نتائج بنفسك .

تمرينات

١ — إذا رفعت درجة حرارة ل من الأقدام من الصلب ى من الدرجات الفاهرنهيتية فإن طول الصلب يزداد بمقدار ٦ ......و . ل ى .

إذا رفعت درجة ميل من الصلب (مثلا خط سكة حديدية) ١٠ درجات فاهرنهيتية فما هى المسافة الزائدة اللازمة ؟ .

٢ — فى الأعمال العلمية ، تقاس درجة الحرارة المئوية . وهذه يمكن تغيرها إلى درجات فاهرنهيتية باستخدام القانون .

ف = $\frac{٩}{٥}$ م + ٣٢ .

حيث ف من الدرجات ، م من الدرجات ترمز إلى درجة الحرارة فى نظامى فاهرنهيت والمئوى على الترتيب . ما هى درجة الحرارة فى نظام فاهرنهيت التى تناظر ١٥ درجة مئوية ؟ ما هى درجة حرارة ٩٠ فاهرنهيت بالدرجات المئوية . ؟

٣ — وزن عشر أقدام من مواسير الرصاص العادية التى محيطها ٢ بوصة ٥٠ رطلا . ما هى الصيغة التى تعطى وزن س من الأقدام من هذه المواسير ؟

٤ — القدم المربعة من الطوب العادى تستطيع أن تحمل وزنا قدره ستة أطنان بأمان . ماهو عدد الأطنان التى تستطيع أن تحملها قطعة من الطوب مساحتها س من الأقدام المربعة .

يستطيع القدم المربعة من نوع جيد خاص من الطوب أن يتحمل ٥٤ طنا . ما هو الوزن الذى تستطيع حمله س من الأقدام المربعة ؟ .

مطلوب عمل أساس من الطوب يستطيع حمل ١٠٠٠ طن .إذا كان الأساس مربع الشكل، فما هى أبعاده إذا صنع :

(١) من الطوب العادى (٢) من الطوب الجيد ؟

٥ — عندما يقطع قطار س من الأميال فى الساعة فإن الضغط

الـكلى على مقدمة القاطرة الناتج عن ضغط الهواء (ص باوند) يعطى بالجدول الآتى:

س	٠	٢٠	٤٠	٦٠	٨٠	١٠٠
ص	٠	٧٩,٥	٣١٨,٠	٧١٥,٥	١٢٧٢,٠	١٩٨٧,٥

هل توجد صيغة بسيطة تربط بين س ، ص ؟ إذا كان ذلك هو الحال فما هى هذه الصيغة ؟

٦ — فى بعض الأحيان يرى الإنسان جدولا يعطى ثمن التذكرة بين أى مكانين فى طريق خط ترام ، كما هو مبين :

من \ إلى	العتبة	ميدان التحرير	القصر العينى
ميدان التحرير	١ قرش		
القصر العينى	٢ قرش	١ قرش	
الجيزة	٣ قرش	٢ قرش	١ قرش

من الواضح أنه لا يلزم مثل هذا الجدول على الإطلاق إلا إذا كان هناك على الأقل محطتين يربط الترام بينهما . إذا كانت هناك ثلاث محطات سيحتوى الجدول على ثلاثة مربعات . أحسب عدد المربعات فى الجدول عندما يكون هناك ٤ ، ٥ ، ٦ ، إلخ من المحطات . ما هو عدد المربعات الذى يحتاج إليه إذا كان هناك س

من المحطات ؟ هل توجد أية علاقة بالأعداد الموجود فى جدول ٦؟

٧ ـــ إذا دخلت ن من الفرق مباراة لا يلعب المهزوم فيها ثانية ، فكم عدد المباريات التى تجرى ؟ (أنظر السؤال الموجود فى نهاية الباب الخامس) .

٨ ـــ يحصل على القدرة بالحصان بالنسبة للسيارات فى بريطانيا والولايات المتحدة من الصيغة :

$$ق = \frac{٢ ن ى^٢}{٥}$$

حيث ق = القدرة بالحصان .
ن = عدد الاسطوانات .
ى = محيط الأسطوانة بالبوصات .

ما هو محيط الأسطوانة اللازم لسيارة ذات أربع أسطوانات لكى تكون قدرتها ٤٠ حصانا ؟

ما هى القيمة المناظرة لقوة ١٠ حصان ؟ ما هى القيمة التى تعطى أقل من ٢٣ حصانا ؟

٩ ـــ تعطى قوة الشدة اللازمة لقطع حبل ذى ثلاث فتلات من القانون .

$$ل = ٥٠٠٠ ى (ى + ١)$$

حيث ل باوند هو الثقل اللازم لقطع حبل قطره ثلاث

بوصات . كم باوند تلزم لقطع حبل قطره $1\frac{1}{2}$ بوصة ؟ ما هو قطر الحبل الذى يكاد يتحمل ٦٠٠٠ باوند ؟ .

١٠ — الثقل وهندردويت الذى يستطيع حبل محيطه م من البوصات أن يتحمله بأمان يعطى من القانون :

$$و = م^{2} .$$

كم هندوريت يمكن وضعها بأمان على حبل محيطه ٢ ، ٣ ، ٤ بوصة؟ ما هو محيط الحبل الذى يلزم لحمل $\frac{1}{4}$ طن بأمان ؟ ما هو عدد الحبال التى محيط كل منها ٢ بوصة يلزم لرفع $\frac{1}{4}$ طن ؟ (الكسور لا تستخدم .) ما هو عدد الحبال التى محيطها ٣ بوصة والتى تلزم للقيام بنفس المهمة ؟

يمكنك أن تجد صيغا أخرى للتمرين فى كتاب المهندسين السنوى لمؤلفه كمب : .Kempe's Engineers Yearbook وقد أخذت منه كثير من الأمثلة المذكورة هنا . ستجد صيغا تشمل موضوعات مختلفة من كمية النشارة التى تتراكم من النجار إلى كمية المطر التى تسقط فى شمال الهند .

الأشكال البيانية أو التفكير بالصور

« يوجه الاهتمام لا لكى توجد فرصة عند السامع للفهم ، إذا كان ذلك ممكنا ، وإنما لكى يتحدث عليه أن يفهم سواء تمكن من ذلك أم لم يتمكن » . هنرى بت - بعض أسرار الأسلوب .

المشكلة الكبرى بالنسبة لأى مدرس هى تقديم الحقائق بطريقة تجعل الطلبة لا بد أن يروا المقصود . العبارة القوية تنسى بسرعة أما الصور الحية فتبقى فى الذاكرة . لا بد أن يكون كثير من الناس قد لاحظوا الفرق بين قراءة مرجع فى التاريخ وبين رؤية فيلم تاريخى . ومهما كانت الدقة بالنسبة للكاتب والفيلم ، فمن المؤكد أن الفيلم يجعل الإنسان يتحقق أكثر من الأحداث ويتذكرها أطول .

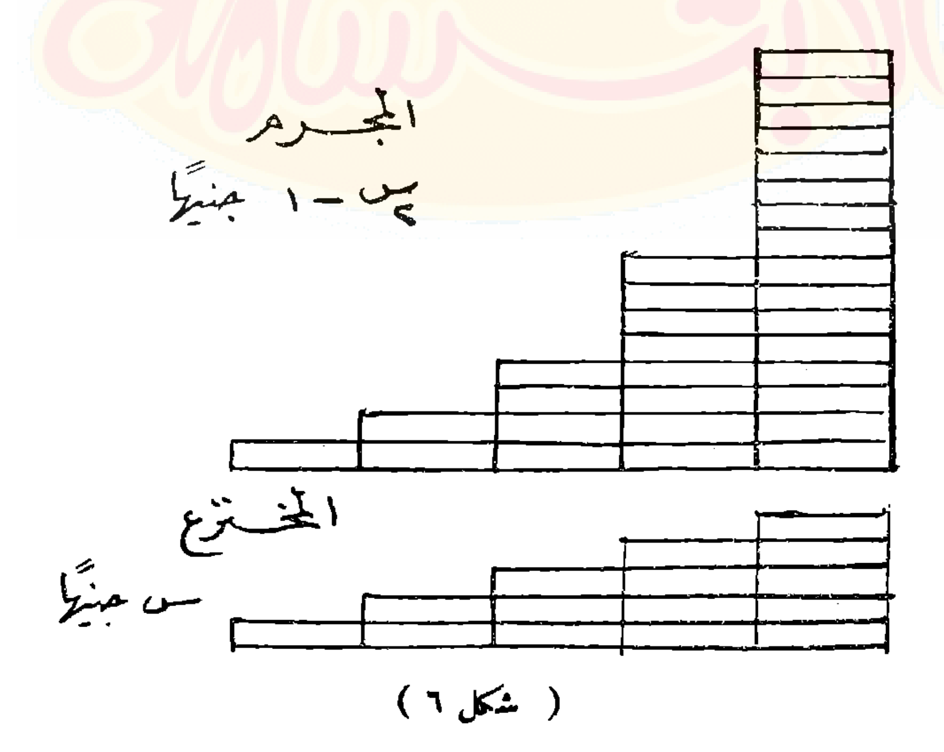
ويكون من الضرورى فى بعض الأحيان فى الأفلام شرح أفكار معقدة ، لا لفصل من الطلبة وإنما لنظارة يمثلون سكان البلد بأكمله . وبالإضافة لذلك فان رواد السينما ليسوا مستعدين للأفكار المركزة . إنهم يريدون إراحة أنفسهم وأن يتسلوا . إنه

لما يوضح لنا الأمور جدا أن تفحص الكيفية التي يؤدي بها مخرجو الأفلام عملهم. إنهم نادرا ما يعجزون عن إفهام وجهة النظر لرواد السينما، وهي حقيقة يجب أن ينظر إليها جديا الانهزاميون في التربية الذين يتعللون دائما بغباء التلاميذ.

درسنا في الباب السابق الطرق المختلفة التي يمكن لكمية أن تنمو بها. افرض أننا رغبنا في تقديم هذه الفكرة لرواد إحدى دور السينما. كيف يمكن القيام بذلك؟ قد ترغب في تقديم حقيقة أن ثروة رجل بدأت تنمو سريعاً، وربما النجاح الاول لمخترع. قد تصوره وهو يحفظ جنيهات ذهبية في خزينة. ففي الأسبوع الأول يضع جنيها واحداً. وفي الأسبوع التالي يضيف جنيهين. وبعد ذلك يضيف ثلاثة جنيهات. مكسب كل أسبوع يكون كومة، وكل كومة تحتوي على جنيه زيادة عن الكومة السابقة لها. حسنا 6 وبعد س من الأسابيع يوفر الرجل س من الجنيهات، وارتفاع أكوام العملة المستمر في الازدياد يبين لنا بمجرد النظر معنى هذه الحقيقة. ولكن ليس من الضروري أن تنتهي الفكرة عند ذلك. للمخترع صديق يعيش على الغش والعنف، مجرم. المجرم مصمم على أن يثبت أن الأمانة غير مجزية. أنه يحث المخترع على أن يأتي إلى حيث يمكن الحصول على المبالغ الكبيرة من المال. إنه يضع

باحتقار بجانب المخترع مبلغا من المال كل أسبوع ، جنيها واحداً في الأسبوع الأول ، جنيهين في الأسبوع الثاني، أربعة جنيهات في الأسبوع الثالث ، وثمانية جنيهات في الأسبوع الرابع ، أي أنه يضاعف المبلغ كل أسبوع . الزيادة المطردة في مكسب المخترع تصبح غير ذات مغزى بجانب ذلك . قد يوفر المخترع س جنيها ولكن المجرم يوفر ٢ س-١ جنيها كل أسبوع (شكل ٦) .

هذه الأرقام لا تبين فقط أن دخل المخترع ودخل المجرم ينموان . إنها تبين مغزى الطريقتين المختلفتين اللتين ينموان بهما ، ونجد هنا الفكرة الأساسية للشكل البياني — أي الشكل الذي يبين للعين معنى التعبيرات الرياضية مثل س ، ٢ س-١ .

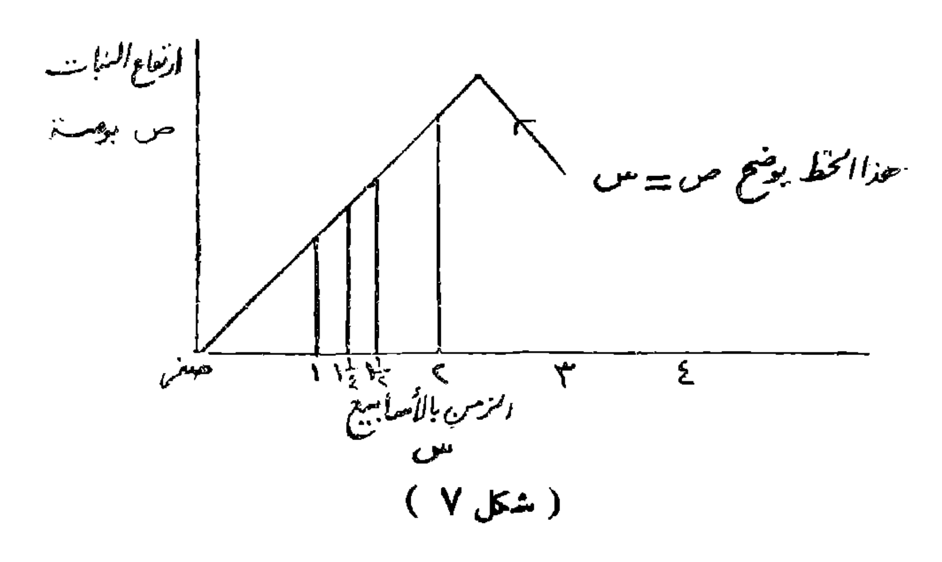


(شكل ٦)

فى هذا التوضيح الخاص ، اعتبرنا أن شيئاً ينمو بخطوات ، بقفزات فجائية . فمثلا ما يوفره المجرم أسبوعياً يقفز من ٤ جنيه إلى ٨ جنيه دون أن يمر بالقيم ٥ ، ٦ ، ٧ جنيه . ولكن من الممكن أيضاً أن ينمو شيء نموا مستمرا بدون قفزات مثل النبات مثلا . يمكننا أن نرسم أشكالا بيانية لتوضيح النمو المستمر ، وعادة نفعل ذلك . فمثلا إذا كان نبات ينمو تبعاً للقانون ص = س (حيث ص تعنى ارتفاع النبات بالبوصات بعد س من الأسابيع) فإن ذلك لا يعنى فقط أن ارتفاع النبات هو ١ بوصة بعد أسبوع وبوصتان بعد أسبوعين. إنه يعنى أن ارتفاع النبات هو $1\frac{1}{4}$ بوصة بعد $1\frac{1}{4}$ أسبوع ، $1\frac{1}{2}$ بوصة بعد $1\frac{1}{2}$ أسبوع ، وهكذا وقد وضحنا ذلك بالرسم (شكل ٧) .

إن ما يحدد نوع رسمنا لمنحنى سواء كان متصلا أو يرتفع بخطوات هو طبيعة العملية التى نريد توضيحها بالمنحنى : ارتفاع نبات ، المسافة التى يقطعها قطار ، وزن طفل ، وهذه تعطى منحنيات متصلة . عدد الأطفال فى أسرة ، عدد مقاعد حزب فى البرلمان ، عدد السفن الحربية فى الأسطول ، هذه تتغير بخطوات .

توجد حالات معينة يمكننا أن نستخدم فيها إما منحنى متصلا وإما منحنى بخطوات . افرض مثلا أننا نرغب فى تمثيل نمو عدد



(شكل ٧)

السكان فى بريطانيا من سنة ١٨٠٠ إلى ١٩٠٠ فإذا تكلمنا بدقة ، فإن هذه الكمية تتغير بخطوات ، تزداد بواحد كلما ولد طفل وتنقص بواحد كلما حدثت وفاة . ولكن التعداد نفسه يقاس بالملايين : لكى يكون للشكل البيانى الذى سنرسمه أبعادا معقولة ، ويجب أن نأخذ مقياساً بحث يمثل كل مليون من الأفراد بما لا يزيد عن بوصة . وكل ولادة أو وفاة منفصلة تناظر تغيرا لا يزيد عن جزء من المليون من البوصة . وهذا أقل بكثير من سمك خط الرصاص ، وحتى لو أمكننا أن نرسم كل خطوة ، فلن نتمكن من ملاحظة التأثير . وبالتالى فإن منحنى التعداد سيظهر كمنحنى متصل وليس على هيئة سلم .

لقد أصبحت الأشكال البيانية جزءاً لا يتجزأ من حياتنا اليومية

بدرجة أنه لا يلزم شرحها فى الواقع . فعادة ، يتمكن الأشخاص الذين ليس لديهم أى تدريب رياضى من رؤية مغزى الشكل البيانى لدرجة الحرارة الموجود أعلى سرير مريض ، والمنحنيات التى تبين التغيرات فى البطالة أو فى تجارة القطن تستخدم الأشكال البيانية فى توضيح تقدم حملة لجمع المال أو إنتاج مصنع . تحتوى الجرائد التجارية على أشكال بيانية تبين اتجاه الأسعار . يوجد على مصابيح أجهزة اللاسلكى اشكال بيانية تبين خواصها . وفى بعض المناطق السياحية يرى الإنسان أجهزة لتسجيل منحنيات إرتفاع وانخفاض البارومتر ، وخرائط تبين التغير فى كمية المطر الساقط وفترة ظهور الشمس من يوم لآخر . الفكرة العامة للشكل البيانى مفهومة فعلا على نطاق واسع :

قد يكون من المفيد أن نشرح بالضبط كيفية رسم شكل بيانى . يوضح شكل بيانى ما الارتباط بين مجموعتين من الأعداد فمثلا ، نحن درسنا فعلا احتمال أن ينو نبات بالطريقة فى الجدول الآتى :

عدد الأسابيع (س)	٠	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	١	١$\frac{1}{4}$	١$\frac{1}{2}$	١$\frac{3}{4}$	٢
الارتفاع بالبوصات (ص)	٠	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	١	١$\frac{1}{4}$	١$\frac{1}{2}$	١$\frac{3}{4}$	٢

نرسم خطا أفقياً ، ونبين عليه عـــدد الأسابيع . ثم نرسم

مستقيمات رأسية تناظر ارتفاع النبات عند أى عدد من الأسابيع. فى شكل ٧ ، رسمت مثل هذه المستقيمات بحيث تناظر ١ ، $١\frac{١}{٤}$ ، $١\frac{١}{٢}$ ، ٢ من الأسابيع . الخط الرأسى المناظر لأسبوع واحد ارتفاعه بوصة واحدة وهو ارتفاع النبات بعد أسبوع واحد . الخط الرأسى المناظر لزمن $١\frac{١}{٤}$ أسبوع يمثل ارتفاع النبات بعد $١\frac{١}{٤}$ أسبوع . وعلى ذلك يمكننا أن نستمر فى رسم أى عدد نرغب فيه من الخطوط الرأسية . هذه الخطوط الرأسية تبين نمو النبات بنفس الطريقة التى كانت أكوام العملة تبين نمو ما يدخره المخترع أسبوعياً . وبعد رسم عدد كبير من هذه الخطوط الرأسية يمكننا أن نرى أن نهاياتها العليا تقع على مستقيم معين . (فى أمثلة أخرى تقع النهايات على منحنى) . برسم المستقيم (أو المنحنى) الذى يصل بين نهايات الخطوط الرأسية نحصل على الرسم البيانى لنمو النبات . وحيث أن النبات ينمو تبعاً للقانون ص = س فإن هذا الخط يسمى شكل ص = س البيانى .

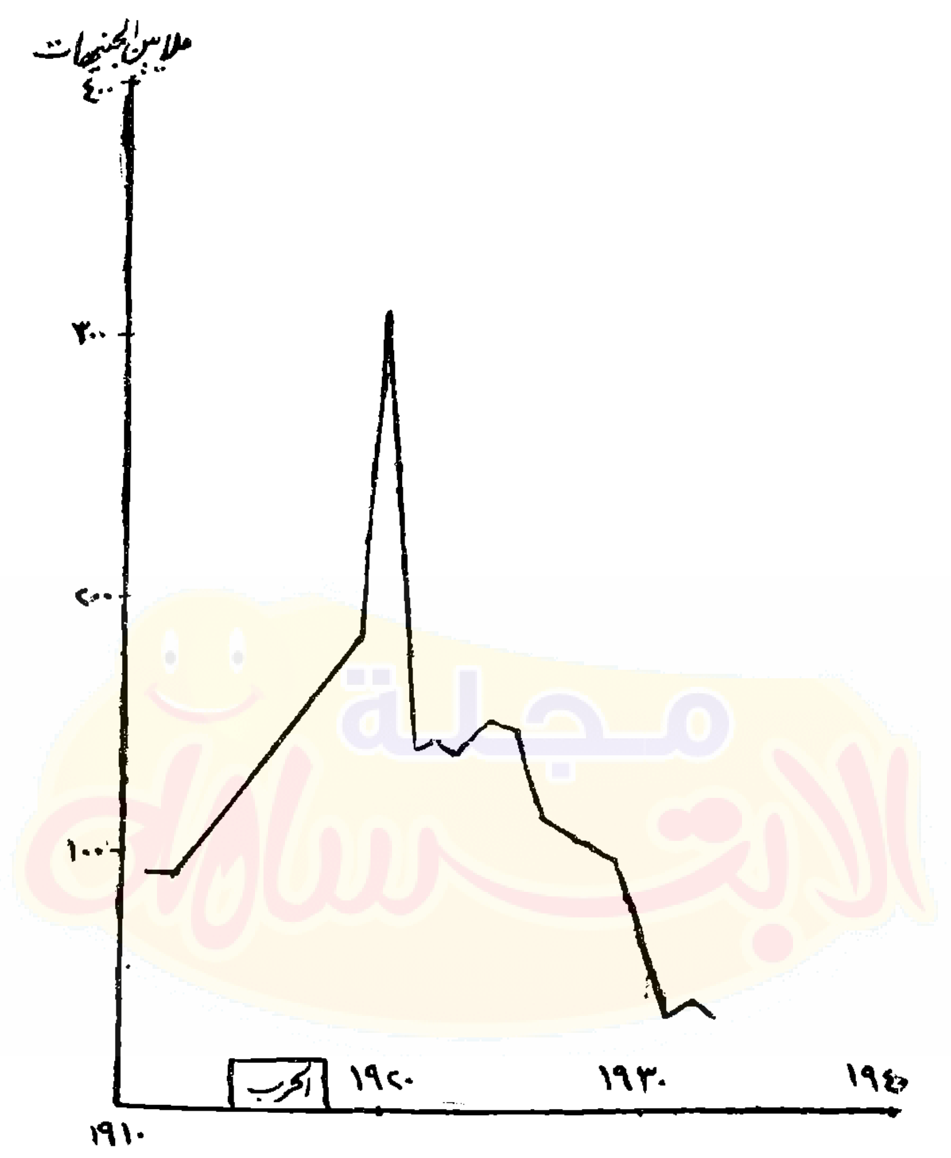
يمكن بهذه الطريقة رسم شكل بيانى لأية عملية أخرى أو أية صيغة رياضية تصفها . سبق أعطاؤك جدولا يبين حركة كرة مقذوفة فى الهواء . ارسم أنت شكلا بيانياً يوضح هذا الجدول . لن تقع نهايات الخطوط الرأسية على خط مستقيم ، وإنما على منحنى لاحظ كيف يعلو هذا المنحنى ما دامت الكرة ترتفع

وكيف ينزل عند ما تأخذ الكرة فى السقوط . كيف يبدو الشكل البيانى الخاص بكرة تسقط ثم ترتد ؟

فى كلا هذين المثالين كانت ص دالة فى س . فى حالة النبات ص = س . وفى حالة الكرة ص = ١٠ س — س٢ . ولكن ، لا تعتقد بأنه لا يمكن رسم الأشكال البيانية إلا إذا وجدت صيغة بسيطة . يمكننا أن نرسم شكلا بيانياً يبين درجة حرارة مريض أو سعر اللبن : إنه لأمر بعيد الاحتمال للغاية أن توجد صيغة بسيطة تتفق مع أى هذين الأمرين .

استخدام الأشكال البيانية

الأشكال البيانية لها ميزة كبيرة عن جداول الأرقام وذلك إذا كنا نرغب فى الحصول على معلومات بمجرد النظر . من السهل جداً أن تمر العين على صف من الأرقام ، ولا ترى أن أحد الأعداد هو أكبر بكثير من بقية الأعداد . أما فى حالة الشكل البيانى فسيبدو هذا العدد كقمة جبل . وأى انحناء فجائى فى الشكل البيانى يرى بسهولة ، بينما لن تكشف نظرة عابرة إلى الأرقام المناظرة عن وجوده . والأشكال البيانية مفيدة بصفة خاصة للرجال المثقلين بالأعباء الذين يريدون أن يعرفوا الخطوط العامة لمسألة ما دون الدخول فى جميع التفصيلات الصغيرة .



يبين الشكل البيانى صادرات نسيج القطن بملايين الجنيهات خلال السنوات المبينة. يمكننا فى ثوان قليلة أن نرى الخطوط العريضة لحالة لانكشير فى هذه الفترة وما نتبينه من الأرقام الفعلية هو أقل من ذلك بكثير. حاول بنفسك أن تأخذ عموداً من الأرقام من إنسكلوبيديا (دائرة المعارف) أوكتاب سنوى

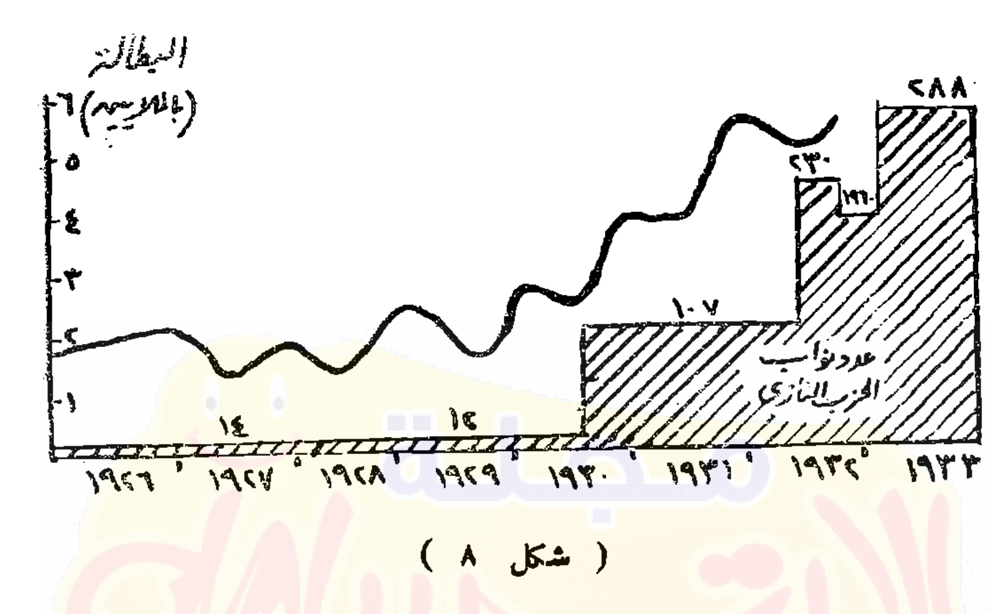
انظر للأرقام مدة خمس عشرة ثانية ثم ابعدها واكتب الأشياء التي لاحظتها . متى تكون الأعداد أكبر مايمكن ، متى تكون صغيرة ، متى تنمو ، متى تأخذ فى النقصان ، . . . إلخ . لن تلاحظ الشيء الكثير فى زمن قصير . والآن ارسم شكلا بيانياً يمثل هذه الأعداد ولاحظ كيف يبين الشكل أموراً فاتت عليك .

هذا هو أبسط استخدام للأشكال البيانية وهو إعطاء فكرة عامة . قد يرغب عالم تاريخ أو عالم اقتصاد أن يعرف مجرد أن لانكشير كانت فى حالة رواج سنة ١٩٢٠ وأن تدهوراً حاداً حدث فى سنة ١٩٢١ . نظرة واحدة لشكل بيانى خاص بصادرات القطن ستذكره بهذه الحقيقة .

وأيضاً ، يمكن استخدام الأشكال البيانية لإيضاح الربط بين حدثين . أغلب الكتب التى كتبت عن ألمانيا تشير إلى كيف أن البؤس الذى كان موجوداً فى ألمانيا خلال الأزمة الاقتصادية العالمية تولد عنه التطرف واليأس وساعد على ظهور الحزب النازى . إلى أى حد نستطيع أن نقبل صحة هذا الرأى ؟

دعنا نرسم على نفس الورقة شكلين بيانيين ، يبين أحدهما

مقدار البطالة فى ألمانيا والآخر يبين عدد النواب من الحزب النازى ، وذلك فى الفترة بين سنة ١٩٢٦ وسنة ١٩٢٣ (شكل ٨) .



(شكل ٨)

يبين الشكل على الفور أن هناك بعض الحقيقة فى الفكرة . فى خلال سنوات الأزمة لم ينجح فى الانتخابات إلا عدد قليل من نواب الحزب النازى : ١٤ ، ١٢ . ويرتفع المنحنيان فى غالبيتهما معاً .

ومع ذلك ، فمن السخف محاولة إيجاد صيغة رياضية لربط الشيئين . فعدد النواب يتغير بخطوات عند كل انتخاب عام . البطالة وعدم الطمأنينة ليسا السببين الوحيدين اللذين يؤثران على الموضوع . فمثلا هزيمة النازيين فى سنة ١٩٣٢ كان نتيجة

لأسباب سياسية ، معارك فيما بين النازيين ، اعتقاداً بأن الجيش سيتخذ موقفاً عدائياً ضد هتلر ، وهكذا .

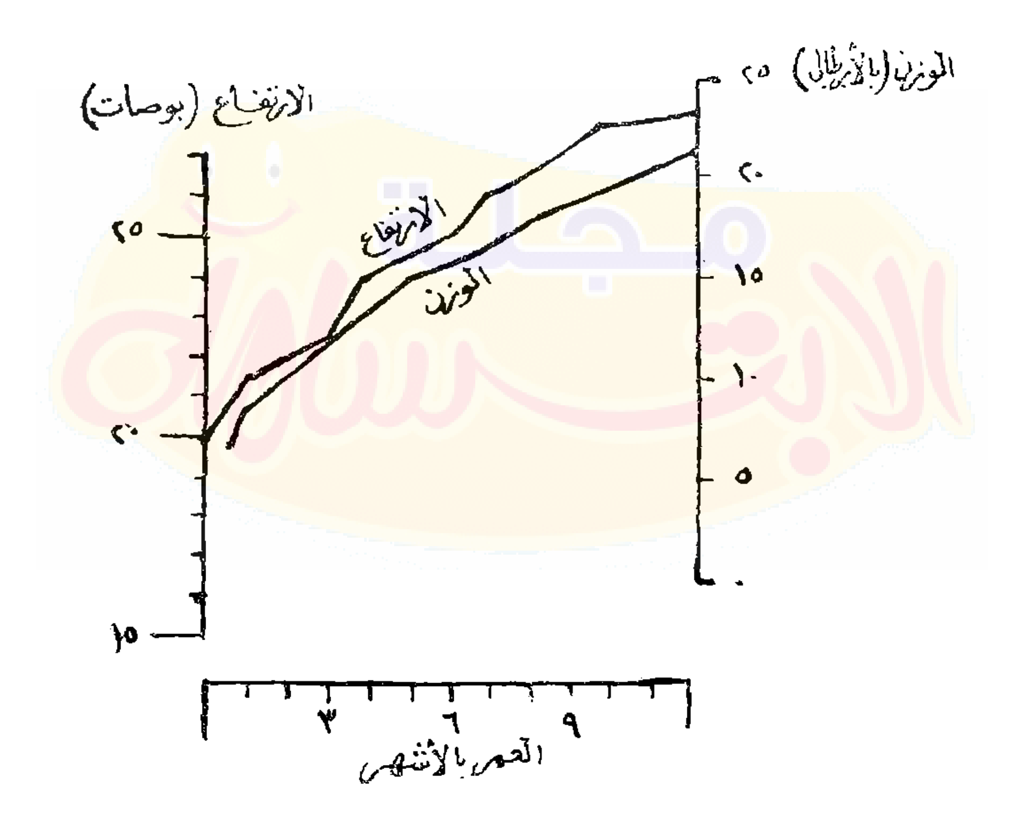
ستلاحظ كيف توجه الأشكال البيانية انتباهك إلى حقائق لم تفسر وتدفعك لزيادة التقصى . لا يعطينا الشكل إشارة للإجابة المحتملة للسؤال فحسب : إنه يجعلنا نلاحظ هبوط عدد الأصوات التى حصل عليها الحزب النازى فى نهاية سنة ١٩٣٢ ، وهو أمر لا يوجد أى ارتباط بينه وبين الشكل البيانى للبطالة . وبذلك يدفعنا الشكل إلى البحث عن حقائق أخرى لتفسير هذا الهبوط .

وأيضاً ، لا يستطيع الإنسان أن يتجنب ملاحظة الشكل الموجى لمنحنى البطالة ، الذى يرتفع كل شتاء وينخفض كل صيف ، وهذا يذكرنا بأنه توجد بعض الصناعات ، مثل صناعة البناء تتوقف عن العمل عندما يسوء الطقس . ويبدو أن صيف سنة ١٩٥٦ كان حالة استثنائية . وقد يتعجب المرء ويتساءل عن السبب . كلما نظرنا مدة أطول للشكل البيانى زاد عدد الأسئلة التى تنشأ وزادت المعلومات التى تساعدنا على التذكر .

من المفيد جمع الأشكال الخاصة بأى موضوع يهتم به شخص . كثيراً ما يسمع الإنسان ملاحظات ويتساءل عما إذا كان هناك دليل على صدقها . وعادة تكفى زيارة لمكتبة عامة للاستدلال على صحة أو عدم صدق بيان ما : إذا أمكن توضيح المسألة بواسطة

شكل بيانى فستكون لدينا طريقة لتسجيل معلومات كثيرة فى حيز صغير . ولن يكون ضرورياً أن تبحث عن نفس الحقائق مرة أخرى . وبمرور الوقت ، سيحتوى تجميع الأشكال البيانية فى الغالب على حقائق تثير الاهتمام .

فى كتاب « فن القراءة » يذكر « كويلر كوش » أن فتاة احتفظت بشكل بيانى يبين الحضور فى كنيسة إحدى القرى ،



الشكلان البيانيان يبينان طول ووزن طفل فى السنة الأولى من عمره . إذا لم يتفق الشكل البيانى للوزن مع الشكل البيانى للطول ، فهناك شيء غير عادى .

وحاولت أن تجد سبب كل زيادة أو نقص يحدث . ولا بد وأن تكون الفتاة قد حصلت على معرفة هائلة بصفات الواعظين وعادات القرية .

يستخدم الأطباء الأشكال البيانية لمعرفة ما إذا كان الأطفال يحصلون على تغذية مناسبة . نرسم شكلين بيانيين لوزن الطفل وطوله على ورقة واحدة . إذا كانت صحة الطفل جيدة ، يرتفع المنحنيان معا . إذا كان الطفل لا يحصل على الغذاء الذى يحتاج إليه فإن منحنى الوزن لا يسير مع منحنى الطول ويكون منخفضا عنه . ولا يلزم أن ينتظر الطبيب حتى توجد مسافة كبيرة بين المنحنيين . إذا لاحظ أن منحنى الوزن قد بدأ فى الانحناء إلى أسفل فإن ذلك قد يكون أول علامة على أنه يوجد شىء ما ، لا يسير كما يجب . وإذا عولج الطفل علاجا خاصا أو زيدت وجبات غذائه ثم لوحظ أن المنحنى بدأ ينثنى إلى أعلى ثانية فإن الطبيب سيعلم أن صحة الطفل بدأت تتقدم .

يتركب جانب من علم تفسير الأشكال البيانية من معرفة كيف يبدو شكل بيانى عندما يزداد شىء ؛ وعندما يزداد بسرعة كبيرة ، وعندما يزداد بسرعة متزايدة ، وعندما يزداد ولكن بدرجة تقل أكثر فأكثر (ارسم أشكالا بيانية لتوضيح هذه الحالات المختلفة).

النتائج التى استخلصت من الأشكال البيانية فى جميع هذه الأمثلة

كانت ذات طابع عام . يرى الطبيب أن صحة الطفل تتقدم أو تسوء ، ولكنه لا يحاول قياس درجة التقدم ، لا يستطيع أن يقول إن صحة الطفل هى ٨٠٪ إلا بقدر ما يمكننا أن نقول إن شخصا سعيد ٨٠٪ أو أمين ٨٠٪ . فالأمور مثل الصحة والسعادة والأمانة لا يمكن قياسها إلا بطريق غير مباشر . فإحصاء الوفيات ، حالات الانتحار ، جرائم السرقة ، قد تلقى بعض الضوء على هذه الأمور . ولكن من الممكن للغاية أن نعرف الكثير عن درجة صحة ، سعادة ، أمانة شخص بدون أن نتمكن من إعطاء رقم واحد يخص أى شيء يمكن قياسه .

ومن ناحية أخرى ، توجد بعض جوانب للحياة تلعب فيها القياسات دورا كبيرا . وهذا صحيح على الخصوص بالنسبة للموضوعات مثل الهندسة والكيمياء والطبيعة .

كرة صغيرة نسبيا موضوعة على شريط سكة حديدية قد تكفى لإخراج القطار عن الشريط . إذا كان كرسى رمان بلى أكبر مما يجب بمقدار واحد من الألف من البوصة فقد يأخذ كل الوزن المفروض توزيعه على عدة كراسى رمان بلى ، كما يبلى بسرعة كبيرة . فى مثل هذه الأمور يكون من الضرورى عادة إجراء حسابات مضبوطة للغاية . لهذا السبب ، لا يقنع المهندسون والعلماء بالبيانات التقريبية . وهم فى بعض الأحيان يرغبون فى قول ، إن منحنى

لا يرتفع ببطء، وإنما إنه يرتفع بمعدل ١ فى ١٠٠ أو ١ فى ٨٧ . ولقد تطور جزء كبير من علوم الرياضة نتيجة لمحاولة إجابة مثل مطالب المهندسين هذه : لقد اكتشف الرياضيون مجموعة كاملة من الأعداد يمكن الإنسان بواسطتها ، ليس فقط أن يصف ، بل أن يقيس بالضبط ما يفعله منحنى عند أية نقطة . الباب القادم ، وموضوعه دراسة السرعة ، سيوضح كيفية القيام بذلك .

الرياضيون والأشكال البيانية

يستخدم الرياضيون الأشكال البيانية لأغراض كثيرة مختلفة ، سنبين بعضها فى الفقرات التالية .

يمكن أن نستخدم الأشكال البيانية لتساعدنا على معرفة الموضوع الذى نتكلم فيه . يحدث كثيراً عندما تقوم بإجراء عمليات طويلة بالرموز الجبرية ، يحدث أن نفقد معنى هذه الرموز ويكون لدينا فى النهاية صيغة حصلنا عليها باستخدام قواعد الجبر ولكننا لا ندرى ما معناها . إذا لم نقنع بالحصول على الصيغة الصحيحة وحاولنا أن نتحقق من معناها فإن ذلك يجعل فهمنا للموضوع أرسخ

مثلا القانون .

$$ق = ٣٦٤ ع - \frac{ع^{٣}}{٢٧٠٠٠٠}$$

يعطى القدرة « ق » التى تتولد عند تحرك أسطوانة بواسطة سير جلدى ، ع تمثل السرعة التى يسير بها السير الجلدى بالقدم فى الثانية . هذا القانون صحيح فى ظروف معينة لا تهمنا فى الوقت الحاضر .

ما الذى يعنيه هذا القانون ؟ إنه يحتوى على نتيجة غريبة . من الطبيعى أن يفترض الإنسان أنه بإدارة البكرة المحركة بسرعة كافية ، يمكننا الحصول على أية قدرة نرغب فيها ولكن ارسم منحنى ق مع أخذ قيم ع بين ٠ ، ٨٠٠٠ سنجد أن ق تزداد إلى أن تصل ع إلى القيمة ٥٧٠٠ ، وبعد ذلك تتناقص . أما إذا أنت جعلت السير يتحرك بسرعة أكبر من ٥٧٠٠ قدم فى الثانية فإن القدرة التى تحصل عليها لا تزداد وإنما تقل . نظرة عابرة للمنحنى تبين ذلك . أما إذا لم يرسم الإنسان المنحنى واستخدم القانون استخداماً أعمى فقد يقع فى أخطاء خطيرة ، مثل تصميم آلات تسير بسرعة كبيرة بدرجة تجعلها غير اقتصادية *

---

* كل من القانون والمنحنى موجود فى كتاب تطبيق الميكانيكا للهندسة لمؤلفه ج . جـودمان الجزء الأول ص ٣٥٥ ؛ الطبعة التاسعة .
J. Goodman Mechanics Applied,To Engineering

من الممكن أن تساعد الأشكال البيانية أي شخص يدرس الرياضة مساعدة كبيرة . وكثير من الناس يمكنهم أن يتتبعوا جميع خطوات حل مسألة عندما يبين الحل لهم، ولكنهم يعجزوا عن اكتشاف الحل بأنفسهم . ويفهمون كل خطوة منفصلة لكنهم لا يعرفون أية مجموعة من الخطوات ستخرجهم من الغابة لا يمكن التغلب على هذه الصعوبة إلا إذا تعلم الإنسان أن يرى معنى الصيغ الرياضية كثير من الرياضيين يفكرون في مسائلهم طوال اليوم، مهما كان المكان الذي يوجدون فيه . إنهم لا يتذكرون جميع القوانين : إنهم يذكرون صورة أوجدتها المسألة في عقولهم . وهم يستمرون في التفكير في هذه الصورة إلى أن تطرأ في ذهنهم طريقة لحل المسألة . وبعد ذلك يذهبون إلى منازلهم لأوراقهم وأقلامهم ومجموعات القوانين الخاصة بهم ثم يعملون على تسجيل الحل الكامل . الأشكال البيانية هي إحدى الطرق التي يمكن بها تكوين صورة مسألة .

إنه لتمرين جيد أن تجمع أو أن تعتاد على الأشكال البيانية للدوال التي تقابلك في العمل كثيراً مثل ص = س ، ص = ٢ س + ١ ، ص = ٣ − ٢ س ، ص = س^{٢} ، ص = س^{٢} + ٢ س + ٥ ، ص = س^{٣} ، ص = ٢^{س} ، ص = $\frac{١}{٢}$ س ، وهكذا .

كثيراً ما يحصل الإنسان فى العمل العلمى على مجموعة من النتائج بالتجربة ، ثم يحاول أن يجد صيغة رياضية تتفق مع هذه النتائج . هذه المسألة قد تكون بالغة الصعوبة وذلك لوجود عدد كبير من الأنواع المختلفة من الصيغ ، وقد يكون أى نوع منها هو النوع الصحيح وغالبا يكون من المساعد لنا أن نمثل النتائج التجريبية بشكل بيانى . إذا كانت الأشكال البيانية لكثير من الدول مألوفة لشخص ، فإنه قد يتعرف على نوع الدالة التى تنتج مثل هذا الشكل البيانى . مثلا جميع الدوال التى أشكالها البيانية خطوط مستقيمة هى من النوع ص = ا س + ب .

وبالطبع يتضمن العمل دائماً أخطاء بسيطة ولا نتوقع أن تقع جميع النقط على منحنى أملس . وتنشأ مثل هذه الأخطاء البسيطة فى القياسات نتيجة لأسباب مختلفة : سمك الخطوط على مسطرة عند قياس طول مثلا . وفى بعض الأحيان نقع فى خطأ كبير ، مثلا قد نكتب ٧٩١٧ بدلا من العدد ٧١٩٧ ، أو قد ننسى قفل دائرة كهربائية فى أثناء إجراء تجربة . يمكن العثور بسهولة على مثل هذه الأخطاء الكبيرة على الشكل البيانى . جميع القراءات تقترب من منحنى أملس ، ولكن النقطة التى تمثل الخطأ تقع بعيداً عن المنحنى ويشك فيها المرء على الفور .

وطريقة العثور على الأخطاء هذه ليست مفيدة فى العمل

العلمى فحسب وإنما هى مفيدة للرياضة ذاتها . فمثلا ، عند حساب مجموعة من الأعداد قد نخطىء في عدد أو عددين منها . وغالبا نستطيع أن نعثر على الأعداد غير المضبوطة من الشكل البيانى . فإذا كانت جميع الأعداد مضبوطة سيكون الشكل البيانى منحنى أملساً ، أو وعلى الأقل هذا الأمر صحيح بالنسبة للأغلبية العظمى من الحالات .

لا تمكننا الأشكال البيانية من التعبير عن صيغة رياضية بمنحنى فحسب ، بل إنها تمكننا من وصف المنحنى بواسطة الصيغة . فمثلا عندما لا توجد ريح يكون الماء الخارج من خرطوم أو ماسورة صغيرة على هيئة منحنى بسيط . إذا وضعت لوحة إلى جانب تيار الماء فإنه يمكن اقتفاء المنحنى ويمكننا أن ندرس بعد ذلك هذا المنحنى ونحاول أن نجد الصيغة التى هى المنحنى الخاص بها . والصيغة ، بمجرد الحصول عليها ، تعطى اسماً للمنحنى . وفرع الرياضة المعروف بالهندسة التحليلية مبنى على فكرة وصف كل مستقيم أو منحنى بالصيغة المناظرة له . إذا أردت أن تدرس الهندسة التحليلية ووجدت أن الكتب المقررة صعبة فأفضل شىء تعمله هو أن تجرى تجارب على المنحنيات بنفسك . ارسم المنحنيات من النوع ص = ا س + ب ، مع أخذ قيم كثيرة مختلفة لكل من ا ، ب ، موجبة وسالبة كبيرة وصغيرة . حقق صحة العبارة التى

ذكرناها فيما سبق وهى أن جميع مثل هذه المنحنيات هى خطوط مستقيمة . ما الذى تلاحظه على الشكلين البيانيين ص = س ، ص = س + ١ ؟ هل تستطيع إيجاد صيغة رياضية تعطى مستقيماً يتعامد مع ص = س ؟ أجر تجارب هذه المستقيمات . وسجل تجاربك وحاول أن تصل إلى نتائج عامة : أنظر كم من الزمن يمضى إلى أن تستطيع أن تعرف بمجرد النظر إلى الصيغ ما إذا كان مستقيمان ، متعامدين ، وبعد ذلك اقرأ الباب الموجود فى الكتاب تحت عنوان « الخط المستقيم » أو « معادلة الخط المستقيم » وستجد فيه نفس النتائج التى وصلت إليها مكتوبة بلغة شخص آخر وحيث إنك تعرف فعلا ما يريد المؤلف قوله فلن يمضى وقت طويل قبل أن تفهم لغته :

أمثـــــلة

١ — ارسم الأشكال البيانية الآتية . ما الذى تلاحظه بالنسبة لها ؟ كيف يمكنك وصف الأشكال التى تكونها بالكلمات ؟

(ا) ص = ٢ س (ب) ص = ٢ س + ١

(حـ) ص = ٢ س + ٢ (ى) ص = ٥ — $\frac{١}{٢}$ س .

٢ — ارسم وصفاً ، كما فى السؤال الأول ، للأشكال البيانية الأربعة الآتية :

(ا) ص = ٣ س   (ب) ص = ٣ س + ١

(حـ) ص = ٣ س + ٢   (ى) ص = ٤ − $\frac{1}{٣}$ س .

٣ — ما الذى تلاحظه بالنسبة للشكلين البيانيين الآتيين ؟

(ا) ص = س^{٢} + ٢ س   (ب) ص = س^{٢} + ٤ س + ٣ .

٤ — ارسم المنحنى ص = س (٩ − س) . ماهى قيم س التى تجعل ص أكبر ما يمكن وما هى أكبر قيمة للدالة ص ؟

٥ — ما الذى تلاحظه بالنسبة للأشكال البيانية للصيغ الآتية ؟

(ا) ص = ٢٥ − س^{٢} (ب) ص = س^{٢} ؟ .

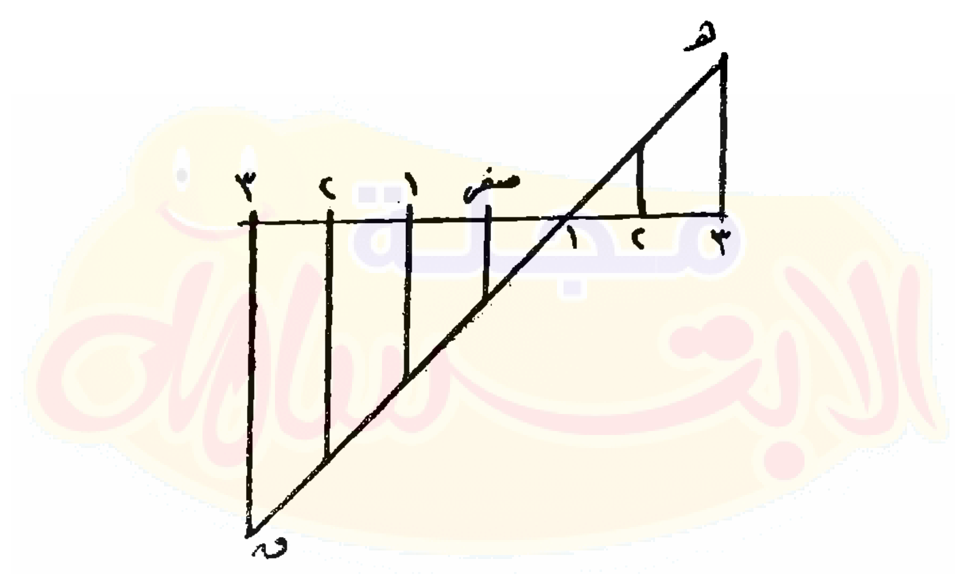
الأعداد السالبة والأشكال البيانية

غالبا ما نرغب فى رسم منحنى تكون س أو ص أو كلاهما أعداداً سالبة فى جزء منه . فمثلا قد نرغب فى رسم منحنى يبين طول قضيب حديدى عند درجات حرارة أقل من الصفر . إذا كانت س من الدرجات هى درجة الحرارة فإن ذلك يعنى أن س عدد سالب . إذا كانت النقطة س = ١ فى رسمنا البيانى تبعد بوصة على اليمين فإن النقطة س = − ١ ستبعد بوصة على اليسار . س = − ٢ ستبعد بوصتين على اليسار وهكذا . وبنفس الطريقة

إذا كانت ص = ١ هى بوصة إلى أعلى فإن ص = — ١ هى بوصة إلى أسفل .

دعنا مثلا نرسم المنحنى ص = س — ١ لقيم س الواقعة بين — ٣ ، ٣ . نحصل أولا على الجدول :

س	— ٣	— ٢	— ١	صفر	١	٢	٣
ص	— ٤	— ٣	— ٢	— ١	صفر	١	٢



نعين قيم س على خط مستقيم س = ٣ تقع على بعد ٣ بوصة على يمين موضع الصفر ، — ٣ على بعد ٣ بوصة على يسار موضع الصفر ، وهكذا . وبعد ذلك نبين قيم ص المناظرة كخطوط رأسية . عندما س = ٣ ، ص = ٢ ، وعلى ذلك نرسم مستقيما إلى أعلى طوله ٢ بوصة من موضع س=٣ . عندما س = — ٣ ، ص = — ٤ ، وعلى ذلك نرسم خطاً إلى أسفل طوله ٤ بوصة

من موضع س = — ٣ . نهايات هذه الخطوط الرأسية تعطينا المستقيم ق ك وهو الشكل البيانى المطلوب للصيغة ص=س—١ .

سنرى إحدى ميزات استخدام الأعداد السالبة فى الأمثلة التى سنعطيها عن شكل الكبارى غالبا ما تكون الصيغة الرياضية أبسط بكثير إذا اخترنا س = ٠ فى منتصف الكبرى عن لو أخذناها فى نهاية الكبرى .

٦ — ارسم منحنى ص = س —٢ لقيم س الواقعة بين ٢ ، ٦ . هذا يعطى جزءاً من خط مستقيم . باستخدام مسطرة ، مد هذا المستقيم فى الاتجاه الجنوبى الغربى . حقق أن هذا الخط يمر بالنقط المعطاة فى الجدول عندما تقع س بين — ٤ ، ٢ .

٧ — ارسم المنحنى ص = ٥ — س لقيم س بين صفر ، ٥ . يعطى هذا جزءاً من خط مستقيم . مد هذا المستقيم باستخدام مسطرة . اقرأ القيم المناظرة لكل من س = ٦ ، س = ٧ . ما هى قيم س التى تجعل ص تساوى ٦ ، ٧ ؟ هل يتفق ذلك مع طريقة إيجاد ٥ — (—١) ، ٥ — (—٢) المشروحة فى الباب الخامس ؟ .

٨ — الرسوم البيانية لوصف الأشكال .

« يحتوى كتاب استخدام الصلب فى البناء » لمؤلفيه : « ر. ب . وي ، ن . د . جرين » على رسوم بسيطة لكبارى مشهورة مختلفة ويبدو أن المنحنيات المعطاة فى الكتاب تتفق مع الأشكال البيانية التالية :

(ا) كوبرى لانجويز فيادكت بسويسرا . القوس المركزى المصنوع من الصلب المقوى يشبه المنحنى :

$$ص = ٢ - \frac{٢}{٩} س^٢ .$$

(ب) القوس الطويل المنخفض لكوبرى تويد الملكى بيرويك ، $ص = ١ - \frac{٢}{٣٧} س^٢$ ، من $س = -٣٫٤$ إلى $س = ٣٫٤$.

(حـ) القوس السفلى على الكوبرى المعلق الواقع إلى جانب كوبرى البرج : $ص = \frac{٩ س^٢}{٨٠}$

(ى) قوس كوبرى شلالات فكتوريا :

$$ص = \frac{١١٦ - ٢١ س^٢}{١٢٠}$$

الخطان الرأسيان موجودان عند

$س = ٢٫٣٥$ ، $س = -٢٫٣٥$.

الخط الأفقى واقع على ارتفاع $ص = ١٫٢٥$.



الخطوط الرأسية فى كوبرى شلالات فكتوريا

٩ — يوجد خطأ فى كل من مجموعات الأعداد الآتية . من المفروض أن تعطى جميع أعداد كل مجموعة منحنى أملسا فى حالة رسمها بيانياً . ما هى الأعداد غير المضبوطة ؟ ما هى الأعداد المضبوطة التى يجب استبدالها بها ؟ (لا نتوقع إلا إجابة تقريبية للجزء الثانى من السؤال .)

(أ) ١٠ ، ١٣ ، ٦١ ، ١٩ ، ٢٢

(ب) ٤ ، ١١ ، ١٣ ، ١٩ ، ٢٠ ، ١٩ ، ١٦

(حـ) ٠ ، ٠ ، ٥ ، ٩ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥ ، ١٤

(ى) ٢٣ ، ٣٤ ، ٤١ ، ٤٩ ، ٥٠ ، ٥٢ ، ٥٣

(هـ) ٣٦١٠ ، ٤٠٠٠ ، ٤٤١٠ ، ٤٦٤٠ ، ٥٢٩٠ ، ٥٧٦٠

١٠ — أحد الأعداد الآتية غير مضبوط ولكنه لا يبعد كثيراً عن القيمة الصحيحة . هل يمكنك معرفة أى الأعداد هو ؟

٣٨٤٤ ، ٣٩٦٩ ، ٤٠٩٦ ، ٤٢٥٢ ،
٤٣٥٦ ، ٤٤٨٩ ، ٤٦٢٤ ، ٤٧٦١

(من المحتمل أنك لن تتمكن من القيام بذلك باستخدام طريقة السؤال التاسع . الغرض من السؤال هو توضيح ما لا نستطيع أداءه بسهولة باستخدام الأشكال البيانية . الغرض من السؤال التاسع هو توضيح ما يمكن أداؤه باستخدام الأشكال البيانية . ستجد فى مكان ما من هذا الكتاب طريقة تعطيك دليلا لحل هذا السؤال الأخير) .

١١ — حتى لو تمكنت من إجابة السؤال العاشر باستخدام الشكل البيانى ، فمن المؤكد أنك ستحتاج لطريقة أخرى للعثور على العدد الخطأ فى مجموعة الأعداد الآتية :

٦٧٢٤ ، ٦٨٨٩ ، ٧٠٦٥ ، ٧٢٢٥ ، ٧٣٩٦ ، ٧٥٦٩ .

الباب العاشر

حساب التفاصيل ــ دراسة السرعة

« فى عهد التلمذة الصناعية أردت أن أتعلم الهندسة النظرية ولم يكن أمامى سوى كتابين امتلآ بالرموز الرياضية المجهولة ، وكان غيرى من الصبية يتثاءبون ويجرون وراء ملاذاتهم بينما كان همى الوحيد معرفة $\frac{ءص}{ءس}$ وعلامة التكامل . وحينما أنظر الآن إلى الوراء أرى أنى قضيت السنين ألهث جريا وراء معرفة كيفية استخدام هذين الرمزين . »

جون برى

السرعة هى إحدى الكلمات المنتشرة فى حياتنا الحديثة . لذلك كان من الطبيعى لعلماء الرياضة الذين اشتركوا فى كل تقدم علمى وصناعى تقوم عليه الحياة الحديثة أن يكون لهم مجموعة خاصة من الرموز لوصف السرعة وموضوع خاص يبحث فى استعمال هذه الرموز . ولم يتمكن علماء الرياضة من مقاومة إغراء الأسماء

الرنانة شأنهم فى ذلك شأن غيرهم فعرف الموضوع باسم حساب التفاضل والتكامل .

ومن المحتمل أن تجد رموز حساب التفاضل والتكامل فى أى موضوع يعالج أشياء تتحرك أو تنمو أو تتغير . وتظهر هذه الرموز حتى فى الموضوعات التى لا يبدو فيها شىء متحرك فتقول إن طريقا ينحنى فجأة . كما تتكلم عن مقدار السرعة التى تغير بها قضبان السكك الحديدية اتجاهها فلا الطريق ولا القضبان تتحرك على الإطلاق . وبالرغم من ذلك فإننا نعنى شيئاً عندما نستعمل مثل هذه العبارات . الكلمات التى كانت أصلا تعنى وصف الحركة ، بسرعة ، فجأة ، يمكن استعمالها لوصف أشياء ليس فيها حركة تماماً كالرموز التى تحل محل الكلمات فى البحث الرياضى . فهى أيضاً يمكن استعمالها لوصف منحنى طريق أو قضبان السكك الحديدية أو أى شىء من هذا القبيل . وعلى ذلك لحساب التفاضل موضوع يمكن تطبيقه على أى شىء يتحرك أو يتغير أو له شكل محدد وهذا لا يستثنى كثيراً . فهو مفيد لدراسة المكينات بجميع أنواعها ، الإضاءة الكهربائية ، اللاسلكى والاقتصاديات والتأمين على الحياة فنى المائتى سنة التالية لاكتشاف حساب التفاضل كان التقدم الأساسى فى الرياضات ينحصر فى تطبيقاته . ولم يستحدث فى الرياضيات إلا القليل جداً من الأفكار الجديدة . إذ بمجرد

التمكن من النظريات الأساسية لحساب التفاضل فإنه يمكن حل مجموعة ضخمة من المسائل بدون صعوبة تذكر . إنه حقا لموضوع جدير بالدراسة .

المسألة الأساسية

تتلخص المسألة الأساسية فى حساب التفاضل فى إيجاد السرعة التى يتحرك بها جسم إذا علمت القاعدة التى تعطى موضعه فى أية لحظة .

فمثلا قد يعطى لنا الجدول الآتى لحجر يتدحرج أسفل سفح جبل :

جدول ٧

الزمن بالثوانى		١	٢	٣	٤	٥	٦
المسافة المقطوعة (بالقدم)	٠	١	٤	٩	١٦	٢٥	٣٦

هذه القاعدة بالطبع سهلة جدا : ص = $س^{٢}$ حيث س الزمن بالثوانى اللازم لقطع مسافة ص قدم .

الآن قد يطلب منا السرعة التى يتحرك بها الحجر ما دمنا نعلم مكانه عند أية لحظة . دعنا نحاول إيجاد السرعة التى يتحرك بها بعد ثانية واحدة .

أول كل شيء إنه من السهل أن نرى أن سرعة الحجر تزداد بإستمرار ففي الثانية الأولى يتحرك قدما واحدة فقط وفي الثانية الثالثة خمس أقدام وهكذا بزيادة قدمين لكل ثانية تمر .

لكن هذا لا يدلنا عن مقدار السرعة التي يتحرك بها بعد ثانية واحدة ولو انه يساعدنا في الحصول على فكرة من الجواب ففي خلال الثانية الأولى يتحرك الحجر قدما واحدة بسرعة متوسطة مقدارها قدم واحدة في الثانية .

هذا لا يعني أن سرعته قدم واحدة في الثانية فالعربة التي تقطع ٣٠ ميلا في الساعة لا تتحرك بسرعة ٣٠ ميلا في الساعة . فإذا كان صاحبها يعيش في بلدة كبيرة فإن العربة تسير ببطء وهي في طريقها لخارج البلدة . ثم يعوض ذلك بأن تسير بسرعة ٥٠ ميلا في الطريق الرئيسي للبلدة . إن الحجر المتدحرج يعمل نفس الشيء إنه يبدأ ببطء ولكنه يعمل على زيادة سرعته طول الوقت . فإذا قطع قدما واحدة في الثانية الأولى فإن سرعته في نهاية هذه الثانية يجب أن تكون أكبر من قدم واحدة في الثانية لأنها تصل إلى أكبر سرعة (أثناء الثانية الأولى) عند النهاية تماما .

وتستمر زيادة سرعته في أثناء الفترة الثانية حيث يقطع ثلاث أقدام ، ونتيجة لذلك في بداية الفترة الثانية لابد أن تكون

السرعة أقل من ثلاث أقدام فى الثانية . وعلى ذلك فبعد ثانية واحدة تقع السرعة بين قدم واحدة فى الثانية ، ٣ أقدام فى الثانية .

هذا أحسن ما يمكن عمله إذا اعتبرنا الزمن فقط بالثوانى الكاملة . ولكن لا داعى للتمسك بالثوانى الكاملة . إنه يمكن بالمثل تطبيق قاعدتنا ص ١ = س٢ لكسر من الثانية . فإذا حسبنا المسافة المناظرة إلى ٩, . ثانية ، ١ و ١ ثانية فإننا نحصل على جدول أصغر .

جـــدول ٨

س	٩و	١	١و١
ص	٨١و	١	١,٢١

ويمكننا ثانية أن نطبق نفس الطريقة تماما فى عشر الثانية ما بين ٩و. ، ١ يقطع الحجر ١٩و. من القدم وهذا يعطى سرعة متوسطة مقدارها $\frac{١٩ر.}{١ر.}$ قدم فى الثانية أى ٩و١ قدم فى الثانية وبنفس الطريقة تكون السرعة المتوسطة فى عشر الثانية الذى يتلو الثانية الأولى هو ١ ر٢ قدم ثانية وبذلك يقع الرقم الذى نريده بين ٩و١ ، ١و٢ ولا يكلفنا الحصول على هذه النتيجة أى عمل أكثر من القسمة العادية .

ولكن بهذه الطريقة لا يوجد حد لدرجة الدقة التى يمكن

الحصول عليها . فإذا اعتبرنا واحداً من المائة من الثانية قبل وبعد ثانية واحدة فإننا نجد أن السرعة تقع بين ١,٩٩ ، ٢,٠١ قدم فى الثانية . وإذا أخذنا واحدا من الف من الثانية فإننا نجد أن السرعة تقع بين ١,٩٩٩ ، ٢,٠٠١ وليس هناك ما يوقفنا عن إعتبار واحد من مليون من الثانية أو واحد من بليون من الثانية إذا شئنا ذلك . إنها سرعة واحدة فقط التى تحقق كل هذه الشروط هى ٢ قدم فى الثانية .

وهذا هو الجواب المطلوب .

بنفس الطريقة تماما نحصل على السرعة بعد ثانيتين من الجدول كالآتى : —

جـــدول ٩

س	١,٩	٢	٢,١
ص	٣,٦١	٤	٤,٤١

الذى يبين أن السرعة بعد ثانيتين تقع بين ٣,٩ ، ٤,٠١ وفى الحقيقة أن السرعة هى ٤ قدم / ثانية .

وبذلك يمكن إيجاد السرعة بعد أى زمن ويمكن جمع نتائج ذلك فى الجدول الآتى :

جـــدول ١٠

الزمن بالثوانى		١	٢	٣	٤	٥	٦
السرعة(بالقدم فى الثانية)	٠	٢	٤	٦	٨	١٠	١٢

ومن السهل أن نرى القاعدة من هذا الجدول . تكون السرعة ٢ س بعد س ثانية .

أولا يوجد الفرد السرعات المناظرة إلى ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦، إلخ ثم (بالطريقة المبينة فى الفصل الثامن) يحاول أن يجد صيغة تحقق هذه الأرقام لتعطى قاعدة للسرعة بعد س ثانية . وهذه تمكن الفرد على أية حال من اكتشاف الجواب : ولإثبات صحته عليه استعمال الجبر .

يمكنك أن تجد بنفسك السرعات المناظرة للصيغة ص=س^{٣}، والسرعات المناظرة للصيغة ص = س^{٤} وهكذا مع ص = س^{٥} ص = س^{٦} إلخ . بعد حساب ص = س^{٣} ، ص = س^{٤} سوف تلاحظ كيف أن النتائج بسيطة للغاية وهى بدورها تجعل نتائج ص = س^{٥} ، ص = س^{٦} أيضا بسيطة ، وتساعدك على اختزال العمل لاكتشاف القاعدة . إن إيجاد القاعدة بطريقة الفصل الثامن سوف يستغرق وقتاً طويلا . وفى إمكانك أن تحسب بنفسك نتائج الحالات السابقة بدون النظر إلى النتائج المبينة أدناه . إنه

يفيد كثيراً أن يجد الفرد النتائج بنفسه بدون الرجوع إلى أى مرجع اذا بحثت فى ذلك سوف تحصل على النتائج المبينة فى الجدول الآتى

جدول ١١

الصيغة التى تعطى المسافة المقطوعة فى س ثانية	الصيغة التى تعطى السرعة بعد س ثانية
ص = $س^{٢}$	٢ س
ص = $س^{٣}$	٣ $س^{٢}$
ص = $س^{٤}$	٤ $س^{٣}$
ص = $س^{٥}$	٥ $س^{٤}$
ص = $س^{٦}$	٦ $س^{٥}$

ومن الواضح أنه يمكن الحصول على هذه النتائج بقاعدة بسيطة. عندما يكون لدينا $س^{٣}$ فى العمود الأول يكون هناك كمية تحوى $س^{٢}$ فى الثانى؛ وقباله $س^{٤}$ يوجد عدد معين مضروب فى $س^{٣}$. فقوة س فى العمود الثانى دائماً أقل بواحد عن الأول. يقابل $س^{ن}$ كمية تحوى $س^{ن-١}$ وأسهل من ذلك القاعدة الخاصة بالعدد الذى يسبق س : إنه مثل العدد الموجود فى العدد الأول، إنه ن، بحيث إذا كانت الصيغة التى تعطى المسافة هى $س^{ن}$ فإن الصيغة التى تعطى السرعة هى ن $س^{ن-١}$.

لاحظ المجهود الذى بذل للحصول على النتيجة البسيطة:

لإيجاد السرعة التى تناظر $س^{٢}$ كان علينا القيام بعمليات حسابية

طويلة ، وملاحظة أن الصيغة ٢ س تحقق النتائج. وكان علينا القيام بهذا العمل أيضاً مع $س^٣$ ، $س^٤$ ، $س^٥$ ، $س^٦$. ثم بتجميع هذه الصيغ في جدول ١١ لاحظنا أنه يمكن أن نستنتج لها قاعدة واحدة عامة. وبمجرد إيجاد القاعدة العامة يمكن تطبيقها مباشرة على أية حالة أخرى فالصيغة ص = $س^{١٧}$ يناظرها السرعة ١٧ $س^{١٦}$ والسرعة المناظرة إلى $س^{٩٢}$ هي ٩٢ $س^{٩١}$.

كثيراً ما نقابل في الميكانيكا والتطبيقات الأخرى صيغاً تحوى قوى مختلفة في س . فمثلا إذا ألقينا كرة إلى أعلى بسرعة ٤٠ قدما في الثانية فإن إرتفاعها بعد س ثانية يساوى ٤٠ س — ١٦ $س^٢$ قدما (لدينا هذا القانون في الفصل الثامن بصورة مختلفة اختلافاً بسيطاً فهي تعطى هناك الارتفاع بعد س أرباع الثانية) . كيف يمكن الحصول على السرعة بعد س ثانية ؟

أحسن الطرق لمعالجة مثل هذه المسألة هي تفتيتها وبدورنا نعتبر الأجزاء المختلفة التي تتكون منها المسألة :

(١) ما هو معدل ازدياد الحد ٤٠ س هي المسافة التي يقطعها الجسم في س ثانية إذا تحرك بسرعة ثابتة ٤٠ قدما في الثانية وعلى ذلك فواضح أن السرعة التي تناظر ٤٠ س هي ٤٠ .

(٢) ماهو معدل ازدياد الحد ١٦ $س^٢$ ؟ يمكننا الحصول على جدول ١٦ $س^٢$ بضرب كل الأرقام في الصف الأخير من

جدول ٧ فى ١٦ ، وبمعنى آخر إذا تحرك جسم طبقاً للصيغة ١٦س٢ فإنه يقطع بعد أى عدد من الثوانى ١٦ ضعفاً للمسافة المقطوعة بالصيغة س٢ . وبذلك يكون متحركا فى أية لحظة بسرعة تساوى ١٦ ضعفاً. وحيث إن السرعة التى تناظر س٢هى ٢س فإن السرعة التى تناظر ١٦ س٢ تكون أكبر ١٦ ضعفاً : أى ٣٢س .

(٣) الآن نعرف أن ٤٠ س تزداد باستمرار بمعدل ٤٠ بينما ١٦ س٢ تزداد بمعدل ٣٢ س .

فبأى معدل تزداد ٤٠ س — ١٦ س٢ ؟ كيف يمكن توحيد هذين المعدلين ؟

يمكن الحصول على ٤٠ س — ١٦ س٢ بطرح ١٦ س٢ من ٤٠ س . كيف يمكن تصوير عملية الطرح هذه ؟ يمكن أن نتخيل أن ٤٠ س ممثلة لدخل رجل فى أى لحظة، ١٦ س٢ ممثلة لتكاليف إعالة أسرته . الدخل والمنصرف كلاهما متزايد . يمثل ٤٠ س — ١٦ س٢ التوازن الأسبوعى الذى يحصل عليه الرجل بعد مراجعة مصاريفه . ومن الواضح أن هذا التوازن يتزايد بمعدل يساوى معدل ازدياد دخله ناقص معدل ازدياد مصاريفه (إذا كان هذا التوازن متناقصاً فإن هذا المعدل يكون أقل من الصفر أى بإشارة سالبة) . معدل ازدياد الدخل ٤٠ ومعدل ازدياد المصاريف ٣٢ س

وبذلك يكون معدل ازدياد الفرق بينهما هو ٤٠ — ٣٢ س وهكذا يمكن توحيد المعدلين بطرح الثانى من الأول .

نصل بذلك إلى النتيجة الهامة : السرعة المناظرة إلى ٤٠ س — ١٦ س^{٢} هى ٤٠ — ٣٢ س .

وسوف نرى أنه يمكن تطبيق ذات الطريقة على أية حالة من نفس النوع . فمثلا السرعة التى تناظر ٤ س^{٣} + س^{٢} + ٣ س + ١ هى ١٢ س^{٢} + ٢ س + ٣ (لا يتغير العدد واحد بالمرة : تعنى ص = ١ أن الجسم موجود دائماً على بعد واحد من نقطة ثابتة . وبالطبع لا تكون له سرعة وبذلك فالعدد ١ الموجود فى الصيغة السابقة لم يضف أى شىء للجواب .

توصلنا الصيغة ٤ س^{٣} + س^{٢} + ٣ س إلى نفس السرعة . وهذا معقول جداً إذ أن ٤ س^{٣} + س^{٢} + ٣ س تنقص دائماً بواحد عن ٤ س^{٣} + س^{٢} + ٣ س + ١ . فالصيغة الأولى لا يمكن أن تسبق أو تختلف عن الثانية وعلى ذلك فطبيعى جداً أن تكون السرعتان متساويتين .)

إذا واجهتك أية صعوبة بخصوص هذه الفكرة فاستنتج لنفسك السرعتين المناظرتين إلى ٥ س^{٢} ، ٢ س ثم إلى ٥ س^{٢} + ٢ س .

احسب السرعة المناظرة إلى س^{٢} + س ، س^{٢} — س ، س + ١ ، س^{٢} + س + ١ وأمثلة أخرى تكونها لنفسك . تحقق من

إجابتك بعمل جداول لهذه الصيغ ملاحظاً ما إذا كانت نتائجك عن السرعات مناسبة .

رموز السرعة

إنه ليس من المناسب أن نستمر فى القول « السرعة المناظرة للصيغة » : سوف نستعمل لذلك رمزا . فإذا كان لدينا أى صيغة تعطى ص فإن ص تعطى السرعة المناظرة ، وهذه تمكننا أن نذكر قاعدة سبق أن حصلنا عليها فى الصورة المختصرة « إذا كانت $ص = س^{ن}$ فإن $صَ = ن س^{ن-1}$

وهذه تعنى تماماً نفس الشىء مثل قولنا إن الصيغة $س^{ن}$ تناظر السرعة $ن س^{ن-1}$ وكما أننا نستعمل ص (س) لتمثل المسافة المناظرة إلى س فإن ص′ (س) تمثل السرعة المناظرة إلى س . فمثلا تعنى صَ (٢) السرعة بعد ثانيتين .

ومن المناسب أحيانا أن نستعمل رمزاً آخر بدلا من ص′ . من هذا الرمز الآخر هو :

$$\frac{ءص}{ءس}$$

وهناك سبب لاستعمال هذا الرمز . فإن ء هنا لها معنى خاص

جدا مثل △ المستعملة فى الفصل الثامن . وفى الحقيقة أنه فقط بواسطة الرمز △ يمكنك هنا معرفة سبب استعمال ء .

أولا — ما هى السرعة ؟ إذا قيل لك إن قطاراً قطع مسافة ٣٠٠ ميلا فى أربع ساعات فأنت تعلم أن سرعته كانت فى المتوسط ٧٥ ميلا فى الساعة . حصلنا على ٧٥ بقسمة ٣٠٠ على ٤ ، وإذا علمت أن قطاراً قد قطع ١٥٠ ميلا حتى الساعة السابعة صباحا ٢٧٠ ميلا حتى الساعة العاشرة صباحا. كيف يمكنك معرفة السرعة المتوسطة ما بين الساعة السابعة صباحا والساعة العاشرة صباحا ؟ أوجد الزمن الذى مر بين الساعة السابعة صباحا والعاشرة صباحا ثلاث ساعات . ثم أوجد المسافة المقطوعة ، ٢٨٠ — ١٦٠ = ١٢٠ اقسم ١٢٠ على ٣ تحصل على الجواب ٤٠ ميلا فى الساعة .

إذا سمينا الزمن س ساعة والمسافة المقطوعة ص ميلا فإننا نحصل على جدول أكثر شبها بجداول الفصل الثامن .

جـــدول ١٢

△س	٣	
س	٧	١٠
ص	١٥٠	٢٧٠
△ص	١٢٠	

كما سبق لدينا قيم س فى صف واحد وتحتها قيم ص المناظرة ثم صفا يعطى △ ص ، التغير فى ص ، والظاهرة الوحيدة الجديدة هى الصف △ س الذى يعطى التغير فى س . فى الفصل الثامن كان التغير فى س ما بين أى عدد والذى يليه دائماً واحد لذلك قد يكون مضيعة للوقت وأيضاً من التعقيد أن يكون للتغير △ س صفا . ولكن فى إيجاد السرعات △ص لازمة حتما . حصلنا على السرعة ٤٠ ميلا فى الساعة بقسم ١٢٠ على ٣ أى بقسمة △ص على △ س .

وعلى ذلك فالقاعدة لإيجاد السرعة المتوسطة هى أن تحسب التغير فى المسافة مقسوما على التغير فى الزمن برموزنا :

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\Delta \text{ص}}{\Delta \text{س}}$$

ولكن هذه تعطى فقط السرعة المتوسطة ونحن نبحث عن السرعة فى أية لحظة . إذا صدمتك عربة بسرعة ٦٠ ميلا فى الساعة فإنه ليس معزيا لأرملتك أن تعلم أن متوسط سرعة العربة كانت فقط ١٠ أميال خلال الساعة الأخيرة ، وذلك لأن السائق كان قد أضاع معظم هذه الساعة فى حانة .

إن الذى يهم ليس السرعة المتوسطة خلال الساعة الأخيرة

إنما المهم السرعة الحقيقية فى تمـام اللحظة التى صدمتك عندها العربة

ولـكن السرعة عند لحظة التصادم لا تختلف كثيراً جداً عن السرعة المتوسطة خلال عشر الثانية السابق للتصادم، وربما قلت عن السرعة المتوسطة خلال واحد من الألف من الثانية السابقة ، وبكلمات أخرى إذا أخذنا السرعة المتوسطة لفترات أصغر فأصغر من الزمن فإننا نقترب من السرعة الحقيقية لأى درجة تريد . ومن الناحية العملية يمكن إعتبار أن السرعة المتوسطة خلال واحد على ألف من الثانية مساوية للسرعة الحقيقية .

ولهذا السبب يرى علماء الرياضة أنه من المفيد أن يمثلوا السرعة برمز مشابه لرمز السرعة المتوسطة . إستعمل اليونانيون الرمز $\triangle$ ليمثل الحرف D ولا يمكننا إتخاذ الرمز $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$ كما هو ليمثل السرعة ، لأن السرعة المتوسطة خلال فترة وجيزة مهما كانت قريبة من السرعة الحقيقية عند أية لحظة لا يمكن أن تكون هى نفسها بالضبط ، إنه مما يؤدى إلى البلبلة أن يكون لدينا نفس الرمزين لشيئين مختلفين .

ومحافظة على الفكرة القديمة التى تذكرنا كيف ساعدتنا فكرة السرعة المتوسطة تجـاه الوصول إلى السرعة الحقيقية

نستبدل الحرف اليونانى $\triangle$ بالعربى ء ونستعمل $\frac{ء ص}{ء س}$ كرمز يمكن استعماله بدلا من صَ ليمثل السرعة .

مرة أخرى جرت العادة فى المسائل الميكانيكية أن تسمى السرعة باللفظ العلمى « السرعة المتجهة » وسوف نختصرها بالرمز ع .

عملية إيجاد معدل تغير كمية يسمى بالتفاضل . إذا فاضلنا ص فإننا نحصل على معدل تغيرها (أو سرعتها)، صَ ، $\frac{ء ص}{ء س}$ ، ع

فإذا فاضلنا $س^2$ نحصل على ٢ س .

يمكن تكرار هذه العملية. فعندما اعتبرنا حجراً متدحرجاً أسفل تل تبعا للصيغة ص = $س^2$ رأينا أن السرعة ع تتزايد باستمرار ولربما يتسائل الفرد ، « ما هى السرعة التى تتزايد بها ؟ » ليس هناك صعوبة فى إجابة هذا السؤال فقد رأينا بعد س ثانية نعطى السرعة ع بالصيغة ع = ٢ س وبذلك يكون لدينا صيغة بسيطة تعطى ع ويكون من السهل إيجاد عَ . فى الحقيقة عَ = ٢ . فالسرعة تتزايد باستمرار . إنها تزيد ٢ فى كل ثانية تمر . (تحقق من هذه النتيجة من قيم ع المعطاه فى جدول ١٠) .

وحيث أن ع هى نفس الشيء مثل صَ فمن الطبيعى أن تمثل عَ بالرمز ص″ . وليس هناك شيئاً جديداً يحتويه الرمز ص″ . تمثل صَ المعدل الذى به تتغير ص . تمثل ص″ المعدل الذى به تتغير صَ . فى الفصل الثامن وجدنا △²ص من △ص بمجرد تكرار العملية التى سبق إجرائها لإيجاد △ص من ص . إنه نفس الشيء هنا . نبدأ بقيمة ص ونتساءل عن مقدار سرعة تزايدها . الجواب هو صَ . والآن نبدأ مرة أخرى بجدول (أو صيغة) صَ ونتساءل عن مقدار سرعة تزايدها . ص″ . فى كثير من الأحيان ص″ تشابه △²ص .

أهمية صَ ، ص″

الكميتان صَ ، ص″ لهما أهمية عظمى فى الميكانيكا ، فمن الواضح أن صَ (وهى التى تعنى السرعة أو السرعة المتجهة) مهمة ، ص″ أكثر أهمية . تقيس ص″ مقدار السرعة التى تتزايد بها السرعة . إذا كنت فى عربة تقطع ٥٠ ميلا فى الساعة ثم أوقف السائق العربة بالتدريج خلال ١٠ دقائق مثلا فإنك لا تشعر تقريباً بأى شيء . ولكن إذا أوقفت العربة فى جزء من المائة من الثانية ، بالتصادم مع حائط ، فسوف تشعر بصدمة ذات قوة هائلة كافية لإحداث أضرار جسيمة . إنه لا يحدث ضرراً إذا

سافرت بسرعة كبيرة مثل ٥٠ ميلا فى الساعة . إنما الذى يؤذى هو التغيير المفاجىء فى السرعة .

وعادة عندما تتغير سرعتنا نشعر بضغط . فإذا كنت فى عربة أوقفت فجأة فإنك تشعر بأنك دفعت للأمام . وحقيقة الأمر أنك تستمر فى الحركة بنفس السرعة ولكن تتوقف العربة . إنك تقف فقط عندما تصطدم بالمقعد الذى أمامك : إنك تشعر بانه يدفعك للخلف . وبنفس الطريقة لا يمكن أن نوقف عجلة مالم يكن بها فرامل (أو يكون هناك ريح شديد فى اتجاه مضاد لاتجاه العجلة أو تكون صاعداً بالعجلة جبلا أو تكون العجلة مشحمة تشحيما رديئاً ، تقوم أية حالة من هذه الحالات مقام الفرامل) .
يفسر هذه الظاهرة قانون نيوتن الثالث للحركة . فحسب قانون نيوتن إذا تمكن جسم من التخلص من جميع المؤثرات الخارجية بأن يكون بعيداً عن جذب الأرض أو الشمس ، بعيداً عن القوى المغناطيسية والكهربائية ولم يكن فى حالة ضغط أو جذب بأى جسم آخر ، فإنه يستمر فى حركته فى خط مستقيم بسرعة ثابتة . ويمكن للفرد أن يرى بالمنظار المكبر جزئيات المادة الصغيرة كالمذنبات مثلا . وقد لوحظ أنه كلما زاد بعدها عن الأرض أو الشمس كلما تحركت تقريباً فى خط مستقيم وبسرعة ثابتة .

عندما نجد جسما يتحرك فى مسار منحنى أو بسرعة متغيرة فإننا نعتقد حينئذ أن هناك شيئاً آخراً مؤثراً عليه . فنقول إن هناك قوة تؤثر عليه ونحاول أن نكتشف ماهية هذه القوة . هل الجسم مقيد بحبل أو بخيط ؟ هل هو ملتصق مع جسم آخر ؟ هل هو تحت تأثير جذب الأرض أو الشمس أو (فى حالة المد والجذر) القمر ؟ هل به مغناطيسية ؟ هل الجسم مشحون بالكهرباء ؟ أو منزلق على سطح خشن يعمل على إيقاف حركته ؟ هل يتحرك فى سائل مثل الماء يعوق حركته ؟ هل يخترق الهواء مثل مظلات الهبوط أو ريشة ساقطة ؟

بعد ذلك نتساءل كيف يمكن قياس القوى : إنه من الواضح أن القوة اللازمة لتغيير سرعة جسم تتوقف على مقدار كتلة الجسم. من السهل أن توقف عربة أطفال متحركة ، وأصعب من ذلك أن توقف عربة قطار منطلقة ، ومن الصعب جداً أن توقف مجموعة من عربات النقل المحملة ، وتقريباً من المستحيل أن توقف هيار الثلج . لذلك يستعمل العلماء كلمة « كتلة » لتعبر عن خاصية الجسم التى من هذا النوع . وقد اختير السنتيمتر المكعب من الماء كوحدة الكتل وسمى بالجرام . أى شىء يمكن إيقاف أو استمرار حركته بنفس السهولة التى نلاقيها مع سنتيمتر مكعب من الماء يقال إن له كتلة جرام واحد . وأى شىء يكون من الصعب إيقاف حركته بنفس

الصعوبة التى نلاقيها مع ١٠٠٠ سنتيمتر مكعب من الماء يقال إن كتلته ١٠٠٠ جرام .

وهكذا سوف نقول باختصار إن كتلة الجسم ك جرام .

قدوجدأن ك ص″ هى القوة التى تغير سرعة جسم (كتلته ك جرام) بمعدل ص″ . وعندما تزداد سرعة الجسم بتزايد ص يندفع الجسم بقوة إلى الأمام . وعندما تتناقص سرعة الجسم تكون ص″ سالبة . وهذا يعنى أن القوة تؤدى عمل الفرامل . إنها تعمل على إيقاف حركته .

من المعتاد فى الدراسة العملية قياس المسافة ص ، لا بالأقدام أو البوصات إنما بالسنتيمترات . وباستعمال النظام المترى للقياسات نوفر كل التعقيدات الناتجة من أن هناك ١٢ بوصة فى القدم ، ٣ أقدام فى الياردة ، ٢٢ ياردة فى السلسلة ، ٣٠¼ ياردة مربعة فى العمود الواحد وهكذا . إننا تسلمنا النظام الإنجليزى للقياس من قديم الزمان قبل التفكير فى العلوم الهندسية الحديثة بفترة طويلة . إنه أثر متعلق بأشياء مثل مساحة الأرض التى يمكن لمجموعة من الثيران أن تحرثها فى اليوم (الفرسخ = طول أخدود) أو المقياس المتوسط لجزء من جسم الإنسان (قدم) . كانت أمثال هذه القياسات مناسبة لأغراضهم الأصلية . أما من الناحية الأخرى فقد أدخل النظام الفرنسى فى أثناء الثورة الفرنسية سنة

١٧٨٩ وكان مصمماً خصيصاً للتجارة والصناعة الحديثة . وترجع أية صعوبة تقابلنا عند تحويل أقدام وأطنان إلى سنتيمترات وجرامات إلى تاريخ البشرية : إنها ليست مشاكل علمية بحتة . وأيضاً يستعمل المهندسون الإنجليز نظاماً للقياس فيه وحدة الكتل وزن رطل وتقاس المسافة ص بالأقدام . وتكون القوة المناظرة إلى ك رطل وعجلة ص″ (مقاسة بالأقدام والثوانى) هى ك ص″ باوندال .

سبق أن اعتبرنا الصيغة ص = ٤٠ س — ١٦ س^{٢} التى تعطى بالأقدام ارتفاع جسم بعد ن ثانية من قذفه لأعلى بسرعة ٤٠ قدما فى الثانية . ما هى القوى المؤثرة على هذا الجسم ؟

ص َ = ٤٠ — ٣٢ س حيث ص″ = ٣٢ .

إذا كانت كتلة الجسم ك باوند فإن القوة المؤثرة عليه تكون ك ص″ وهذه تساوى : ٣٢ ك . هذه القوة لا تتوقف على س . إنها لا تتغير بتغير س . إن مقدار القوة يساوى ٣٢ ك : تكون الإشارة التى تسبقها سالبة لأن الأرض كما نعرف تجذب الجسم إلى أسفل . وفى حالة ما إذا كان الجسم آخذا فى الارتفاع (مثل البالون) تكون هذه القوة موجبة .

لقد وجد بالتجربة أنه إذا قذف أى جسم ثقيل فى الهواء

فإنه يتحرك بحيث تكون ص″ = — ٣٢ ولنفرض أن الجسم ثقيل لدرجة أنه يمكن إهمال مقاومة الهواء. ومن الواضح أن هذا القانون لا ينطبق على ريشة أو مظلة هبوط. فمظلة الهبوط تسقط بطريقة تختلف تماماً عن الطريقة التي يسقط بها الحجر الثقيل. يعطى القانون السابق ذكره نتائج مناسبة مع حجر ساقط أو كرة كريكت، أو جسم ثقيل. لكن لا يمكن تطبيقه على ريشة، أو قطرات المطر أو الفئران. وأيضاً لا يمكن تطبيقه على السرعات الكبيرة جداً. فى حركة قذيفة أو رصاصة ربما تكون القوة الناتجة من مقاومة الهواء أكثر بكثير من قوة الجاذبية.

إن العدد ٣٢ بالطبع ليس صحيحاً. إن الأرض لا يهمها أن تجذبنا نحوها بقوة هى مضاعف بسيط لطول أقدامنا! ولكن ٣٢ قريبة جداً لمعظم الأغراض.

حيث إن جذب الأرض يجعل قيمة ص″ = — ٣٢ تكون قوة الأرض المؤثرة على كتلة ك باوند هى —٣٢ باوندالا (يحصل عليها بوضع ص″ = — ٣٢ فى ك ص″). تعنى الإشارة السابقة أن هذه القوة تعمل إلى أسفل.

موضوعات أخرى مفيدة (*)

لقد نظرنا إلى الآن فى حالة خاصة جداً وهى حالة جسم متحرك فى خط مستقيم وتحت تأثير قوة واحدة فقط .

وفى أغلب الدراسات العلمية تكون المسألة أكثر تعقيداً . فالمصعد يتحرك إلى أعلى وإلى أسفل فى خط مستقيم ولكن تحت تأثير قوتين هامتين : جذب الأرض إلى أسفل وشد الحبل الرافع إلى أعلى . ربما نحتاج أيضاً أن نأخذ فى الاعتبار أى تدبير لمنع المصعد من التصادم بجدران عمود الرفع ، الاحتكاك ، مقاومة الهواء ... إلخ . وحتى لو أهملنا ذلك فإنه لا يزال لدينا قوتان للاعتبار . فى الأمثلة الأخرى سنضطر إلى اعتبار الأجسام التى لا تتحرك فى خطوط مستقيمة : قطار أو عربة متحركة على منحنى ، قذيفة فى الهواء ، قطعة معدن فى عجلة دوارة .

يختص علم الاستاتيكا بالتأثير الناتج من مجموعة من القوى .

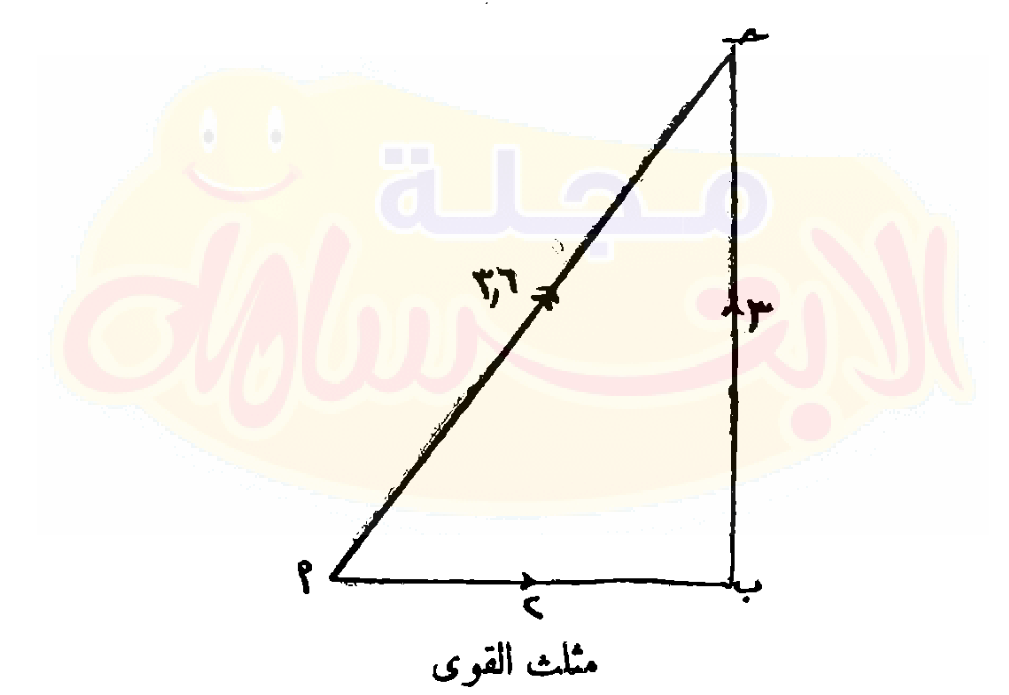
(*) بقية هذا الفصل تحتوى على تطبيقات ربما تفيد بعض القراء ولكنها ليست ضرورية لفهم بقية الكتاب . وسوف يشار إلى هذا القسم فى الفصل الثالث عشر .

ويجب اكتشاف قانونها أولا بالتجربة . ثم بعد ذلك يمكن استعماله.

إذا أثرت عدة قوى فى اتجاه واحد تكون النتيجة كما نتوقعها. إذا شد شخصان مركبة للثلج كل ساحباً بقوة ١٠٠٠ باوندال فإن التأثير الناتج يكون مثل تأثير قوة جذب واحدة مقدارها ٢٠٠٠ باوندال : لقد جمعنا القوى المختلفة على بعضها .

إذا أثرت قوتان فى اتجاهين مختلفين . فإنه يمكن بسهولة حساب التأثير الناتج . إذا وزن مصعد ٢٥٠٠ رطل فإن الأرض تجذبه لأسفل بقوة ٣٢ × ٢٥٠٠ باوندوال — أى ٨٠٠٠٠ باوندال . وإذا جذب الحبل المصعد لأعلى بقوة ١٠٠٠٠٠ باوندال فإن المصعد يكون تحت تأثير قوتين، ٨٠٠٠٠ باوندال إلى أسفل . إن التأثير الناتج من هاتين القوتين يكون مثل تأثير قوة مقدارها ٢٠٠٠٠ باوندال (يحصل عليها بطرح ٨٠٠٠٠ من ١٠٠٠٠٠) تؤثر لأعلى . ويجب ملاحظة أن الحبل يجب أن يحتمل شداً أكبر من وزن المصعد . ذلك لأنه فقط عندما يكون شد الحبل إلى أعلى أكبر من جذب الأرض إلى أسفل تكون القوة المحصلة إلى أعلى . ويجب أن تكون القوة المحصلة إلى أعلى حتى تهيء المصعد حركة إلى أعلى (وبنفس الأهمية)، أن تكون كذلك عند نهاية حركته إلى أسفل .

فى منجم للفحم ، يرفع المصعد العمال وينزلهم خلال مئات الياردات فى فترة وجيزه من الزمن يحصل فيها تغييرات كبيرة فى السرعة وإنها لمسألة فى غاية الأهمية أن يكون الحبل متيناً . ليس فقط لاحتمال وزن القفص والعمال الذين بداخله ولكن أيضاً لكى يحتمل الجهد الزائد لبدء الحركة وإيقافها . (يمكن إجراء ذلك بمصاعد نموذجية مستعملا خيوط قطنية بدلا من الحبل لكى تبرهن على تأثير الشد المفاجئ) .



مثلث القوى

يجب أن ندرس مبدأ جديداً لكى نعالج القوى التى لا تعمل فى إتجاه واحد . لنفرض أن لدينا قوة مقدارها ٢ باوندال تؤثر شرقاً وقوة مقدارها ٣ باوندال تؤثر شمالا : ما هى القوة المكافئة لذلك ؟ من المستحيل حل ذلك بالكلام :

إنه يمكننا فقط أن نحاول أن نرى ماذا يحدث لجسم صغير عندما نجذبه شرقاً بخيط يتصل به ونحو الشمال بخيط آخر (لتفاصيل التجربة يمكنك الاطلاع على كتب الإستاتيكا) إن القارئ يمكنه أن يرى النتيجة المحتملة ، سوف يتحرك الجسم فى اتجاه ما بين الشمال والشرق . تبين التجارب أن الطريقة الآتية تعطى الحل الصحيح . ارسم خطا طوله ٢ بوصة نحو الشرق . سمى هذا الخط ا ب . من النهاية الشرقية لهذا الخط (ب) ارسم ب حـ طوله ٣ بوصة نحو الشمال . لقد رسم الخط ا ب بطول يساوى ٢ بوصة ليمثل قوة مقدارها ٢ باوندال ورسم الخط ب حـ بطول مقداره ٣ بوصة ليناظر القوة التى مقدارها ٣ باوندال . فإذا قسنا ا حـ نجد أن طوله ٣٫٦ بوصة . يعطى طول واتجاه ا حـ جواباً للسؤال .

إن القوتين ٢ باوندال نحو الشرق ، ٣ باوندال نحو الشمال مجتمعتين يجذبان الجسم فى اتجاه ا حـ بقوة تساوى ٣٫٦ باوندال . لسبب واضح يعرف هذا المبدأ بمثلث القوى . فى المثلث ا ب حـ يمثل الضلعان ا ب ، ب حـ القوتين المعطاتين . يمثل الضلع الثالث ا حـ القوة الناتجة من تأثير هاتين القوتين مجتمعتين .

فى المقلاع العادى تثبت قطعتان من المطاط فى قطعة صغيرة

من القماش وعند انطلاق المقلاع تتحرك قطعة القماش الصغيرة في إتجاه يقع بين إتجاهي قطعتي المطاط .

الهندسة المستوية

عند معالجة المنحنيات استعملنا فكرة تعيين موضع نقطة بقياس بعدها عبر الورقة « شرقاً » وبعدها « شمالا » . يمكن استعمال نفس الفكرة عند دراسة حركة أى ثقل صغير عندما يتحرك على منحنيين . نفرض أنه بعد س ثانية كان الثقل الصغير على بعد ص قدم شرقا ، ع قدم شمالا من نقطة ثابتة . وربما يكون هذا الثقل الصغير جزءاً من آلة . إن القاعدة التي تعطى ص ، ع بدلالة س تتوقف على الطريقة التي تتركب بها الآلة . فمثلا ربما يكون الثقل جزءاً من آلة بخارية . فإذا علمنا شكل قضبان السكك الحديدية والسرعة التي يسير بها القطار لعرفنا وضع كل جزء من الآلة البخارية عند أى زمن بمعنى آخر نعرف القيم التي تأخذها ص ، ع بعد س ثانية .

إذا لم تؤثر أية قوة على الجسم ، يتحرك الجسم في خط مستقيم . فعندما تتحرك آلة بخارية حول منحنى فإنها لا تتحرك في خط مستقيم ولا أى جزء من الآلة البخارية يتحرك في خط مستقيم . وعلى ذلك لابد من وجود قوى تؤثر على كل جزء من

الآلة البخارية . وسوف نلاحظ دائماً أنه عند مرور آلة بخارية على منحنى أنها تضغط على القضيب الخارجى تماماً كالسيارة التى تسير حول منحن بسرعة كبيرة فإنها تميل إلى السير على الحافة الخارجية للطريق . إذا لم يكن الطريق معداً إعداد ملائماً . وتضغط القضبان على العجلات وتجعلها تدور حول المنحنى . بدلا من السير فى خط مستقيم . فهل من الممكن معرفة مقدار القوة المؤثرة على أى جزء من الآلة البخارية ؟ إنه من الممكن ولو أنه ليس من السهل وصف الطريقة بكلمات قليلة .

ولنبدأ قبل كل شىء بما يجنبنا التعقيد بأن نفترض بأن الآلة البخارية بكافة أجزائها لا تتحرك إلى أعلى أو إلى أسفل . فحيث أنها تبقى دائماً على نفس الارتفاع يمكن وصف حركتها وصفاً كاملا بواسطة جدول يبين مقدار بعدها شرق نقطة الأصل ومقدار بعدها شمال و . وعلى ذلك فأول شىء نفعله هو اكتشاف صيغ أو عمل جداول تعطى ص ، ع المناظرة إلى أى زمن س ثانية . ولنفرض أنه قد أكمل هذا الجزء من العمل .

سوف يكون سهلا للغاية أن ندرس حركة آلة بخارية (أو أى جزء صغير منها) متجهة نحو الشرق ، إذا لم يكن هناك حركة اتجاه الشمال . تكون الآلة البخارية حينئذ متجهة نحو الشرق فى خط مستقيم . وبعد س ثانية تعطى ص بعدها شرقاً

وتكون القوة التى تدفع أى جزء صغير (كتلته ك باوند مثلا) نحو الشرق (بالطريقة السابقة) هى ك ص″.

ومن السهل أيضاً أن نحصل على الجواب إذا كانت الآلة البخارية متحركة نحو الشمال. إذ بنفس الطريقة تكون القوة التى تدفع أى جزء صغير تجاه الشمال هى ك ع″.

وهنا تسعفنا الطبيعة بالحل فنكشف حقيقة أن الحركة تجاه الشرق والحركة تجاه الشمال يمكن معاملتهما كأنهما منفصلتان ولم يكن لدينا سبب أولى يجعلنا نتوقع هذه النتيجة.

نحصل على القوة الحقيقية التى تدفع الجزء الصغير بتحصيل (باستعمال مثلث القوى) القوة ك ص″ شرقاً مجتمعة مع القوة ك ع″ شمالا.

وبذلك يمكننا حل المسألة حلا كاملا. ليس هناك أية صعوبة جوهرية إذا اعتبرنا الحركة إلى أعلى وإلى أسفل تماماً كما اعتبرناها للشرق والشمال. إن القوى الناتجة من حركة أجزاء الآلة البخارية إلى أعلى وإلى أسفل مهمة للغاية. فإن الآلات البخارية القديمة كانت إذا سارت بسرعة كبيرة ترتفع فى الهواء.

يتحدث كيمب Kempe عن التصميم الحديث للآلات البخارية فى كتابه السنوى للمهندسين فيقول: «القوى الأفقية هى الأكثر

ضرراً ، ولو أن المهندسين الأمريكيين يعتبرون أن القوى الرأسية هى الأكثر ضرراً ولـكن الخبرة الإنجليزية تأخذ طريقاً وسطاً بين القوى الرأسية والأفقية الزائدة » .

حساب القوى الذى تعرضنا له فى حديثنا عن الأثقال المتحركة مسألة عملية فى تصميم وتوازن الآلات . ولا يتسع المقام هنا أن نشرح الطريقة بوجه مرضى ، ولـكن من الممكن تحديد الطريقة ولو بصورة غير واضحة وفى كلمات قليلة حتى نبين أن النظريات المستعملة قليلة وبسيطة .

خاتمة

يبدو لك علم الإستاتيكا والديناميكا كأنهما غير حقيقيين إذا لم يكن لديك خبرة بالأوزان الثقيلة . يمكنك أن تتعلم علم الديناميكا فى أوقات فراغك بتحريك أو إيقاف عربة سكة حديدية ثقيلة (لكن مشحمة جيداً) أو زحافة المزارع أكثر مما تتعلمه من كتب الميكانيكا . ويمكنك الاستفادة من قراءة كتاب فى الديناميكا فقط إذا أمكن لكلمات مثل « القوة » أن تظهر بصورة براقة فى مخيلتك . وعندما يكون لديك الشعور اللازم للموضوع يمكن للكتب أن تكون فى غاية الأهمية بل ، ومسلية ولكن ليس قبل ذلك .

لا يحتاج حساب التفاضل إلى نفس الخبرة العملية فكل واحد تقريباً يعرف ما هى السرعة إنما المهم فى الموضوع هو دراسة مجموعة من الأشكال حتى تتحقق من نوع الحركة التى تمثلها . ولنأخذ أية صيغة . كون لها جدولا مبيناً المسافة المقطوعة بعد فترات مختلفة . فإذا لم تتمكن من معرفة السرعة المضبوطة إبدأ بالتساؤل . ربما كانت الأسئلة البسيطة هى أحسن ما نبدأ به . هل السرعة مليون ميل فى الساعة ؟ أو بوصة كل قرن ؟ أو تقع بين الإثنين ؟ حسناً فإننا نعرف الآن شيئاً عن السرعة . ابدأ بادخال النهايات ولاحظ كيف يمكن جعلها متقاربة . أدرس طرقك الخاصة فى التفكير . كيف علمت أن السرعة أقل من مليون ميل فى الساعة ؟ ما هو الدليل من جدولك الذى يؤيد وجة نظرك ؟ ما هى ، فى الحقيقة ، الطريقة التى تتبعها لتقدير السرعة ؟ هل يمكن تطبيق هذه الطريقة للحصول على تقديرات أدق ؟

أنت تعرف ما هى السرعة . فلا تصدق رجلا يدعى أنه قطع ٥ أميال فى الساعة ولكن تصدقه إذا قضى ثلاث ساعات ليقطع ٦ أميال . عليك فقط أن تطبق نفس الطريقة على الأحجار التى تتدحرج أسفل سفح جبل ، وستجد أن حساب التفاضل رهن إشارتك .

أمثـــــلة

لقد أوصى القارئ ألا يحاول أن يناقش أية مسألة قبل أن يكون لديه صورة كاملة واضحة عنها فى مخيلته . ويكون قد أوجد طريقة ما لإبراز أن المسألة متصلة بالحياة العملية . حتى يتمكن من أن يرى ويلمس المعانى التى تنطق بها . هذا أمر مهم بوجه خاص عند دراسة السرعات التى ليست بالمرة شيئاً بسيطاً كما كنا نظن أولا . وعلى القارئ أن يجد لنفسه طريقة ما يتمكن بواسطتها من ملاحظة الحركة . ربما يكون ذلك قلماً متدحرجاً أسفل غطاء درج أو عجلة أسفل سفح جبل أو ثقلا معلقا بخيط . هناك نصيحة خاصة يمكن ذكرها على نمط الصور السينمائية المتحركة . معظم أطفال المدارس معتادون على طريقة رسم الصور على صفحات كتاب بحيث أنه إذا سمحنا لهذه الصفحات أن تتساقط فى تتابع سريع فإن الأشكال تبدو متحركة . ونفس هذه الفكرة يمكن استعمالها لدراسة حركة نقطة . فمن ميزتها أنها تمكن الفرد من دراسة الحركة « مجمدة » بملاحظة مواضع النقطة على صفحات الكتاب المختلفة كما لو كانت فى حركة . فى السؤالين ١ ، ٢ افرض أن الصفحات تتساقط بمعدل عشر صفحات فى الثانية .

١ — ضع على الصفحة الأولى من الكتاب نقطة على بعد ١و٠ بوصة من آخر الصفحة وعلى الثانية على بعد ٢ر٠ من البوصة. وهكذا النقطة فى التي الصفحة النونية تكون على بعد $\frac{ن}{١٠}$ بوصة إلى أعلى الصفحة . وهذه تبين الحركة التى فيها ص = س (ص بالبوصات ، س بالثوانى . ويبين موضع النقطة على أية صفحة حركتها بسرعة ثابتة إذ أنها دائماً ١و٠ من البوصة أعلى من موضعها فى الصفحة السابقة

٢ — ضع على الصفحة النونية نقطة على ارتفاع $\frac{ن^٢}{١٠٠}$. هذه تبين الحركة التى فيها ص = س^٢ التى ناقشناها فى هذا الفصل . لاحظ كيف تتحرك النقطة ببطء فى نصف الثانية الأول (خمس صفحات) وكيف تزداد سرعتها بمرور الزمن .

٣ — يتحرك جسم تبعا للقانون ص = س . كون جدولا لحركته واثبت لنفسك : (١) أنه متحرك بسرعة ثابتة . (٢) أن هذه السرعة هى الوحدة . فى الحقيقة عندما ص = س فان ص َ = ١

٤ — بالمثل بين أنه عندما ص = ٢س ، ص َ = ٢ .

٥ — وعندما ص = $\frac{٣}{٤}$ س ، ص َ = $\frac{٣}{٤}$.

٦ — عندما ص = س + ١ ، ص َ = ١ .

٧ — وعندما ص = س + ٢ ، صَ = ١ .

٨ — عندما ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ١ ، صَ = $\frac{٣}{٤}$.

٩ — وعندما ص = $\frac{٣}{٤}$ س + ٢ ، صَ = $\frac{٣}{٤}$.

١٠— يطارد كلب قطة . تتحرك القطة على حسب القانون ص = ٣٠س + ٢ ، والكلب على حسب القانون ص = ٣٠س هل صحيح أن (ا) كلاهما متحرك بسرعة ٣٠ قدماً فى الثانية ؛ (ب) وأن الكلب دائماً خلف القطة بقدمين ، (حـ) وأن صَ = ٣٠ لكلتا الحالتين .

١١ — إذا تحركت القطة على حسب القانون ص = ٢٠ س + ١٠ والكلب على حسب القانون ص = ٢٥ س هل صحيح (ا) أن الكلب يبدأ حركته بعشر أقدام خلف القطة ؟ (ب) أن الكلب يتحرك أسرع من القطة (حـ) أن الكلب سوف يلحق بالقطة خلال فترة وجيزة ؟ ما قيمة صَ للقطة ؟ ما قيمة ذلك بالنسبة الكلب ؟ ومتى يسبق الكلب القطة ؟ ،

١٢ — أكتب صَ للحالات الآتية :

(ا) ص = س^{٢} . (ب) ص = ٢ س^{٢}

(حـ) ص = ٢س^{٢} + ١ . (ى) ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} .

(هـ) $ص = س$. (و) $ص = س^2 + س$.

(ز) $ص = س^2 + س + ١$. (ح) $ص = \frac{١}{٢} س^2 - ١$.

(ط) $ص = س - س^2$. (ى) $ص = ١ - س^2$

(ك) $ص = س^3$. (ل) $ص = ٢ س^3$.

(م) $ص = ٢ س^3 + س$. (ن) $ص = ٢ س^3 + ١$.

(ع) $ص = ١٠ س^3 - ٢٠ س^2 + ٧ س - ٣$.

١٣ — رأينا أنه عندما $ص = س^2$ تكون $ص' = ٢ س$ ، $ص'' = ٢$. كون جداول مبينا ص ، صَ ، ص″ ، △ص ، △٢ص وعندما س = ٠ ، ١ ، ٢ ، ...... ، ١٠ . هل صحيح أن :

(أ) جدول صَ تقريباً مشابه ولكن ليس تماماً لجدول △ص ؟

(ب) △٢ص تماماً مثل ص″ ؟

١٤ — إذا كانت $ص = س^3$ ، $ص' = ٣ س^2$ ، $ص'' = ٦ س$. كون جداول ص ، صَ ، ص″ ، △ ص ، △٢ص . هل صحيح أن : (ا) صَ تتغير تقريباً مثل △ص ؟

(ب) ص″ تتغير تقريباً مثل △٢ ص ؟

١٥ — إذا درست مسألة ووجدت أن الصيغة التى تعطى صَ

تتغير بطريقة مخالفة تماماً عن △ صَ (مثلا صَ تتزايد باستمرار ، △ ص تتناقص باستمرار) فهل تعتقد أنك أخطأت فى حسابك أم لا ؟ ماذا يحدث مع صً ، △²ص؟ هل تتوقعهما ، كقاعدة، أن تتغيرا تقريباً بنفس الطريقة ؟



الباب الحادى عشر

من السرعة إلى المنحنيات

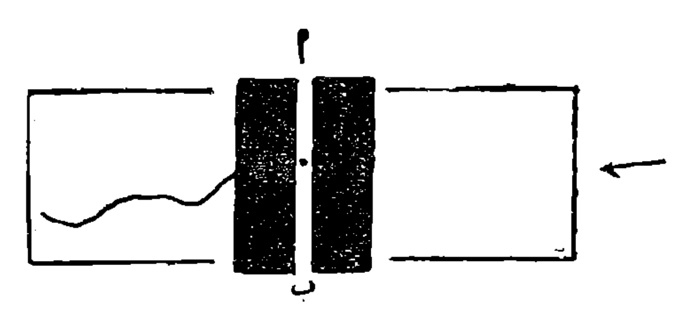
إن مواطننا الدكتور جول قد ساق مثلا الحوت الذى قد تبلغ سرعته ثلاثين ميلا فى الساعة ، بينما بعض أنواع السمك الأخرى قد تبلغ سرعتها أكثر من ذلك كثيراً ، ودعا كل من يريد أن ينجح فى بناء السفن إلى دراسة النسب الطبيعية .

من تاريخ قناة السفن بمانشستر لمؤلفه بوسدن ليتش .

قد اعتبرنا حتى الآن أن صَ أو $\frac{ء ص}{ء س}$ رمزاً لسرعة نقطة متحركة . وهذا يكفى جداً لتطبيقات كثيرة هامة ولكن هذا نصف الموضوع فقط . فهناك مسائل كثيرة يمكن أن يستعمل فيها حساب التفاضل . فمثلا يمكن بواسطته إيجاد شكل المنحنى الذى تتخذه سلسلة معلقة من طرفيها، أو الطريقة التى يتوزع بها الإجهاد على كوبرى . وفى أية حالة من هذه الحالات لا توجد حركة ما .

من السهل أن ننقل معلوماتنا عن الحركة إلى بيانات عن منحنى

إذ أن أى نوع من الحركة يمكن بسهولة تمثيله بمنحنى . اعتبر الجهاز البسيط المبين فى شكل ٩ .



(شكل ٩)

نفرض أن هناك سن قلم متحركة فى الفتحة ا ب . وأن تحت الفتحة صفحة من الورق متحركة بسرعة ثابتة نحو اليسار . فمن الواضح أنه يمكن تسجيل حركة القلم على الورقة على شكل منحنى . وإذا أردنا معرفة كيف كان القلم متحركا فما علينا إلا أن نمرر الورقة مرة أخرى تحت الفتحة ومن خلالها يمكننا أن نرى جزءا صغيراً جداً من المنحنى يظهر على شكل نقطة متحركة إلى أعلى وإلى أسفل بمرور الورقة نحو اليسار .

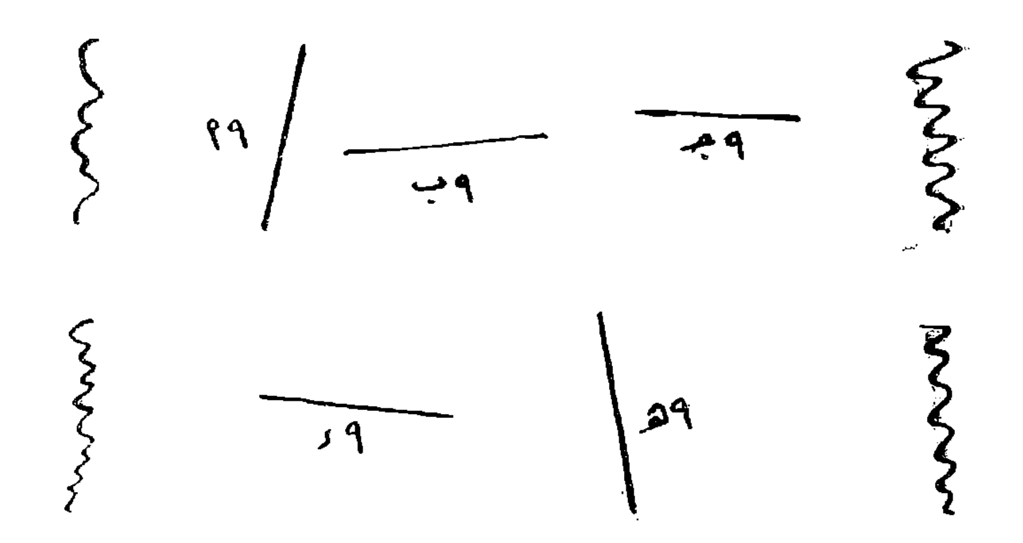
هذا الجهاز أشبه ما يكون بالحاكى . إذ يحفر مجرى أسطوانة الحاكى بواسطة إبرة متذبذبة ، وبإدارة الأسطوانة يمكننا الحصول على الذبذبات الأصلية . وعلى ذلك فجميع خواص الحركة الأصلية يمكن إلى حد ما الاحتفاظ بها فى شكل المجرى ؛ وأى تغيير فى شكل المجرى سوف يسبب بعض الاختلاف عند إدارة الأسطوانة .

وبنفس الطريقة ، ترتبط حركة سن القلم مع المنحنى المرسوم على الورقة المتحركة . وأى شىء يمكن أن يقال عن حركة القلم يخبرنا بشىء عن شكل المنحنى . وأى شىء يمكن أن يقال عن المنحنى يخبرنا بشىء عن حركة القلم .

والآن نعلم أن صَ تعبر عن مقدار السرعة التى يتحرك بها القلم عند أية لحظة ، ص″ تخبرنا عما إذا كانت سرعة القلم متزايدة أو متناقصة ، لذا كان من الضرورى معرفة معنى صَ ، ص″ وما تخبرنا به عن شكل المنحنى المرسوم بالقلم . وسوف يكون ذلك هو مهمتنا التالية .

حالة الحركة المنتظمة

سوف نبدأ باعتبار أبسط حالة. الأشكال فى ص٢٥٦ من ١٩ إلى ٩ هـ تبين الآثار المتخلفة من خمس تجارب . فى كل حالة من هذه التجارب تحرك القلم بسرعة منتظمة .وكان عرض شريط الورق بوصة واحدة يتحرك خلال الفتحة تجاه اليسار بمعدل بوصة واحدة فى الثانية . إنه يمكنك إذا شئت أن تنشأ جهازاً على النمط المبين فى شكل ٩ وتمرر هذه الأشرطة خلالها ، وبذلك تحصل مرة أخرى على الحركات الأصلية .



ماذا يحدث عندما يمر ٩ ا خلالها ؟ إنها تأخذ فقط جزءاً من خمسة أجزاء من الثانية ، وخلال هذه الفترة تقطع النقطة المتحركة عرض الورقة ، مسافة بوصة واحدة . ٩ ا هي أثر نقطة متحركة بسرعة ٥ بوصة في الثانية ولذلك فإن صَ = ٥ .

٩ ب هي أثر نقطة متحركة لأعلى الفتحة ولكن بمعدل أبطأ بكثير . في ثانية واحدة ارتفعت النقطة جزءاً من عشرة أجزاء من البوصة فقط . هنا صَ = $\frac{١}{١٠}$.

بمجرد مقارنة ٩ ا ، ٩ ب يمكننا أن نرى أن الخط يكون شديد الانحدار عندما تكون النقطة قد تحركت بسرعة كبيرة (أي عندما تكون صَ كبيرة) ، ولكنه يكون مستوياً تقريباً عندما تتحرك النقطة ببطء (صَ صغيرة) . في الحقيقة صَ تقيس مقدار انحدار الشكل .

و ٩ جـ هي الأثر المتخلف عندما يكون سن القلم في حالة سكون . فتبقى النقطة على نفس الارتفاع . ولا يكون لها سرعة حينئذ صَ = صفر وعلى ذلك فإذا كانت صَ = ٠ فإن الشكل يكون مستوياً .

في ٩ ء تحرك سن القلم أسفل الفتحة أثناء مرور الورقة . فبعد مرور ثانية كانت النقطة قد تحركت لأسفل واحد من عشرة من البوصة . وبذلك يكون التغير في ص خلال ثانية واحدة — $\frac{1}{10}$ ، ويتبع ذلك أن تساوى صَ — $\frac{1}{10}$.

أيضاً في ٩ هـ يهبط سن القلم بوصة واحدة في جزء من خمسة أجزاء من الثانية ؛ وبذلك يكون هابطاً بمعدل ٥ بوصات في الثانية ، أي صَ = — ٥ .

يلاحظ أن الشكل ينحدر إلى أسفل عندما تكون صَ سالبة (حالة ء ، هـ) ويتجه إلى أعلى عندما تكون صَ موجبة (حالة ا ، ب) .

وبالاختصار فإن انحدار الشكل يتوقف على مقدار صَ : فسواء ارتفع الخط إلى أعلى أو انخفض إلى أسفل فإن ذلك يتوقف على ما إذا كانت إشارة ص + أو — ، صَ = ٠ تعني أن المنحنى مستوياً .

الحالة العامة

قد اعتبرنا فقط إلى الآن ما قد يحدث عندما يتحرك سن القلم بسرعة منتظمة ولكن هذه ليست الحالة دائماً . فكثيراً ما نضطر لدراسة أشياء تتحرك بسرعات مختلفة فى فترات مختلفة .

إلا أنه لا يزال فى الإمكان استخدام النتائج التى توصلنا إليها بدراسة الحالات البسيطة . يجب أن تتحقق من ذلك بنفسك ، بواسطة جهاز ما على نمط شكل ٩ . إذا حركت قلماً إلى أعلى وأسفل الفتحة مغيراً سرعته فإنك سوف تجد أنه عندما يتحرك القلم بسرعة فإن الأثر الذى يتركه يكون منحدراً ؛ وعندما يتحرك ببطء فإن الأثر الذى يتركه لا يكون كثير الانحدار . حتى أنه يمكننا أن نقول إن السرعة تناظر الانحدار . فإذا تغيرت السرعة فإن انحدار الشكل أيضاً يتغير . فى هذه الحالة يكون الشكل مقوساً بدلا من أن يكون مستقيما كما كان سابقاً .

هذا يسوقنا إلى موضوع ص″ . تخبرنا ص″ عن مقدار سرعة تغير السرعة صَ . سوف نركز اهتمامنا فى إشارة صً ، سواء كانت + أو ــ فإذا كانت صً + فذلك يعنى أن صَ تتزايد . (أى أن صَ تتغير بإضافة شىء إليها) وإذا كانت صً ــ فذلك يعنى أن صَ تتناقص (يطرح شىء منها) .

لاحظ النماذج الأربعة المبينة فى الشكل :

نموذج ٤	نموذج ٣	نموذج ٢	نموذج ١
— صَ	— صَ	+ صَ	+ صَ
— صً	+ صً	— صً	+ صً

ما هى إشارات صَ ، ص″ فى نموذج ١ ؟ هذا المنحنى يرتفع وإنحناؤه إلى أعلى لذلك فإن صَ يجب أن تكون + . وكلما تحركت إزداد إنحدار المنحنى وبازدياد إنحداره (مقاسا بـ صَ) متزايدة . هذا يعنى أن ص″ يجب أن تكون + .

من السهل أن يحدث لك بعض البلبلة بين معنى صَ ، ص″ تذكر أن صَ تقيس مقدار سرعة ص أى تقيس صَ سرعة نقطة متحركة . كما تقيس ص″ مقدار سرعة تغير صَ ، أى مقدار سرعة تغير السرعة .

إذا كان هذا المنحنى يوضح جزءاً من الشكل البيانى لغزوة حربية فإنه سوف يعنى (ا) أن الجيش كان متقدما (ب) وأن سرعة تقدمه كانت دائماً متزايدة . (ا) تناظر القول الرياضى أن صَ + (ب) تناظر القول أن ص″ + .

لدينا حالة مختلفة فى نموذج ٢ . حقيقة أن انحناء المنحنى إلى أعلى ولكن كلما تحركت قبل الانحناء . وهذا يناظر الإشارة الحربية « تقدمنا مستمر ولكن أخذ يقل نتيجة لمقاومة عنيفة » .

حيث إنه تقدم ، تكون صَ + . وحيث أن معدل التقدم أخذ يقل تكون صً — .

وعلى الفرد أن يعطى عناية لنماذج ٣،٤ نتيجة كون صً سالبة ، وعلينا أن نتذكر أن تغير صَ من —١٠ إلى صَ = —١ يعبر عن زيادة فى صَ نتيجة لخواص الأرقام السالبة .

نموذج ٣ يمثل فى البداية هبوطاً سريعاً ، وبالأساليب العسكرية هزيمة . وبعد ذلك يستمر المنحنى فى الهبوط ولكن بسرعة أقل . لقد أوقف التقهقر . وأخذ الموقف يتحسن . يحقق هذا التحسن إشارة صً الموجبة . يبين الهزيمة إنحناء المنحنى إلى أسفل : حيث صَ — .

ربما يتذكر القارئ أن الخط ٩ ﻫ بانحداره إلى أسفل يجعل صَ = — ٥ بينما فى ٩ ى فيه صَ = — ½ . فى نموذج ٣ ينحنى الجزء الأول مثل الخط ٩ ﻫ بينما تكون نهاية المنحنى أشبه بالخط ٩ ى ، وعلى ذلك فى نموذج ٣ تبدأ صَ بأن تكون حوالى — ٥ وتنتهى بأن تكون حوالى — ٥ وتنتهى بأن تكون حوالى — ½ عليك بإضافة شيء إلى — ٥ لجعلها — ½ . وهذا هو سبب كون صً ، معدل تغير صَ ، موجبة .

من الناحية الأخرى فى نموذج ٤ يتأزم الموقف بغاية السرعة .

فكلما هبط المنحنى إلى أسفل زاد إنحداره باستمرار . ربما تكون صَ فى البداية — $\frac{1}{2}$ وفى النهاية — ٥ . وبذلك تتغير صَ من سيء إلى أسوأ ، أى تكون صً — .

وبهذه النماذج الأربعة نكون قد ذكرنا كل الاحتمالات الأساسية . إما أن تكون صَ + أو — ، وإما أن تكون صً + أو — (ما لم يحدث أن تكون صَ ، صً صفراً) . وباستعمال النماذج الأربعة يمكننا أن نستنتج شكل أى منحنى على شرط أن نعرف إشارة صَ ، صً

لاحظ أنه من السهل تماماً أن تعطى صً معنى بسيطاً . فعندما تكون صً + يكون المنحنى محدبا (نماذج ١ ، ٣) وعندما تكون صً — يكون المنحنى مقعراً (نماذج ٢ ، ٤)

مثال

نفرض أنك سئلت عن الشكل العام للمنحنى

ص = س^{3} — ٣ س ؟

سوف نعتبر شكل المنحنى بين س = — ٢٠ ، س = + ٢٠ .

نبدأ بتعيين قيمة صَ و صً . حيث إن ص = س^{3} — ٣ س

فإن صَ = ٣ س^{2} — ٣ ، صً = ٦ س

واضح أن ص″ تكون + عندما تكون س + ، — عندما تكون س — . هذا يبين أن المنحنى يكون محدباً لجميع قيم س الموجبة مقعراً لجميع قيم س السالبة .

إذا حسبت بعض قيم س سوف ترى أن ٣س^٢ — ٣ وهى قيمة ص تكون + عندما تقع من بين — ٢٠ ، — ١ وأيضاً عندما تقع بين ١ ، ٢٠ ، ٣س^٢ — ٣ تكون — عندما تقع س بين — ١ ، ١ .

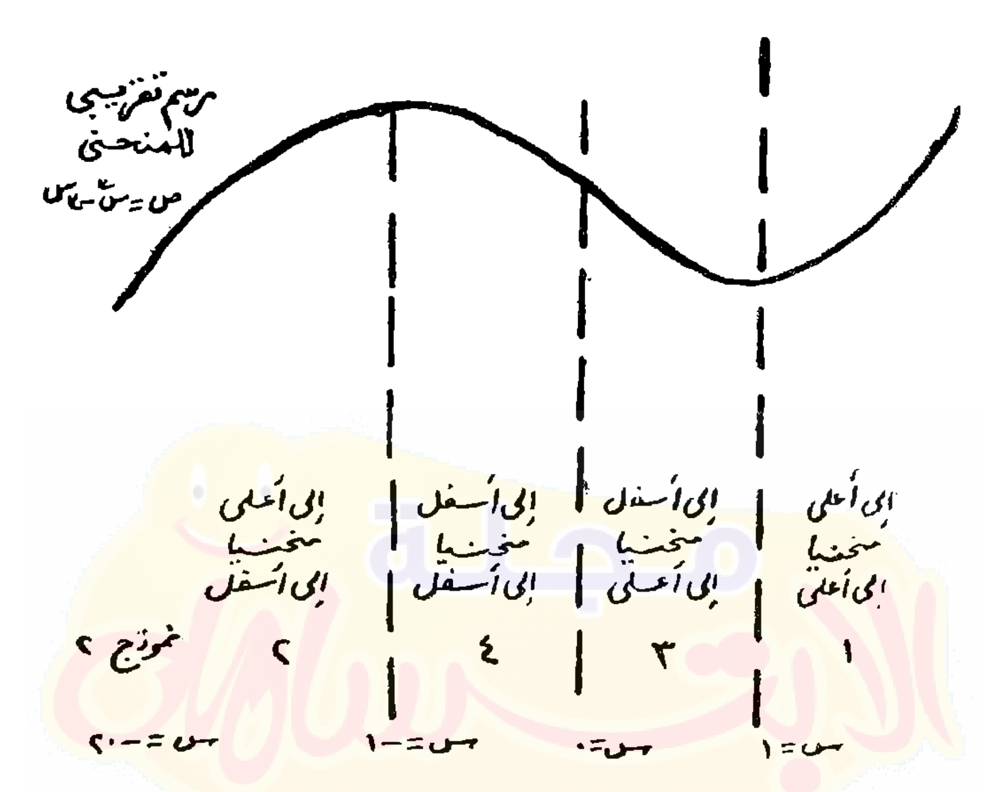
ويمكننا جمع هذه البيانات فى جدول كالآتى : —

س	—٢٠		—١		٠		١		٢٠
ص′		+++		——		——		+++	
ص″		———		——		++		+++	
المنحنى يشبه نموذج		٢ ٢ ٢		٤ ٤		٣ ٣		١ ١ ١	

نستنتج من ذلك أنه :

من س = — ٢٠ إلى — ١ يتشابه المنحنى مع نموذج ٢
— ١ إلى ٠ » » » » ٤
٠ إلى ١ » » » » ٣
١ إلى ٢٠ » » » » ١

من هذه البيانات مجتمعة نرى أن الشكل العام للمنحنى يجب أن يكون كالآتى :



وكان من الممكن بالطبع أن نرسم شكلا مضبوطاً بتعيين عدد كبير من النقط على المنحنى . وبذلك نحصل فى النهاية على نفس المنحنى . لكن الطريقة التى شرحناها مستعملين صَ ، صً تكون فى العادة أقصر وأكثر تثقيفاً وفناً . وسوف توضح بعض الأمثلة فى نهاية هذا الفصل وجهة النظر هذه .

سبق أن رأينا فى الفصل العاشر أن صَ كانت تقيس السرعة ، صً القوة المؤثرة على جسم متحرك . وكانت صً الموجبة تعنى أن

الجسم مدفوع إلى أعلى (أو فى بعض الحالات إلى الأمام)، ص″ السالبة تعنى أن الجسم مدفوع إلى أسفل (أو فى بعض الحالات إلى الخلف).

لكن يمكننا بدارسة الشكل الذى يمثل حركة الجسم أن نرى كيف تتغير صَ ، ص″. فيمكننا عندما ننظر إلى الشكل أن نقول (مثلا) «هنا يرتفع الشكل بانحدار شديد. فالجسم لا بد أن يكون متحركا بسرعة كبيرة. ولكن المنحنى ينثنى إلى أسفل وهذا يعنى أن ص″ سالبة وأن هناك قوة تعمل على إيقاف الحركة».

بقليل من التمرين يكون من السهل تماماً أن نتحدث من الشكل عن كيفية تغير صَ ، ص″ ، أين تكون ص″ + وأين تكون ص″ سالبة إلخ ...

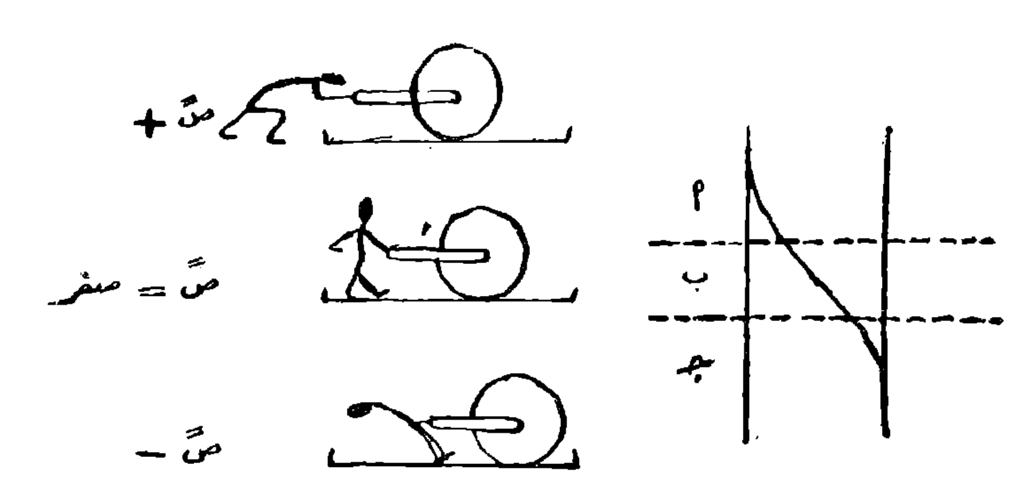
ولكن نفرض أننا لا نكتفى بوصف عام بل نفرض أننا نريد قياس السرعة عند لحظة معينة؛ كيف يمكننا ذلك؟

لقد رأينا (فى فصل ١٠) أن السرعة الحقيقية لجسم لا تختلف كثيراً (فى العادة) عن السرعة المتوسطة خلال فترة وجيزة من الزمن. فإذا علمنا مقدار المسافة التى يقطعها جسم فى جزء من عشرة أجزاء من الثانية، لأمكننا تكوين فكرة عن مقدار سرعة حركته.

إذا عرض علينا الشكل الذى يبين حركة جسم هل يمكننا أن نعرف المسافة التى يقطعها بعد جزء من عشرة أجزاء من الثانية ؟

يبين شكل ١٠ جزء من منحنى مكبراً تكبيراً مناسباً . تمثل المسافة ا ب جزء من عشرة أجزاء من البوصة ، وتناظر جزء من عشرة أجزاء من الثانية : فى بداية هذه الفترة من الثانية لمس القلم الورقة عند حـ وفى نهاية عشر الثانية لمس الورقة عند ء . لا بد وأن يكون قد تحرك إلى أعلى مسافة مقدارها ء هـ فى أثناء هذه الفترة . بكلمات أخرى تمثل ء هـ التغير فى ص : أى △ ص . ويمثل الطول ا ب الزمن الذى مر وبذلك فإن ا ب = △ س .

حينئذ يمكن إيجاد السرعة المتوسطة $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$ بقسمة الطول ء هـ على الطول ا ب . ا ب يساوى حـ هـ فى الطول . ولذلك فإن ءهـ مقسوماً على حـ هـ يمثل السرعة المتوسطة . وواضح أن ء هـ على حـ هـ يعطينا مقياساً تقريبياً لانحدار المنحنى بين حـ ، ء .



تمهيد الطرق

يسجل المنحنى الأيمن حركة الهراسة . لمقاربة هذا المنحنى بجهاز شكل ٩ كان من الضرورى أن نجعل الصفحة رأسية حينئذ تبدو الهراسة وكأنما تتحرك إلى أعلى (كحرف القلم فى الفتحه).

يمكن تقسيم الحركة إلى ثلاث مراحل ا ، ب ، ﺣ .

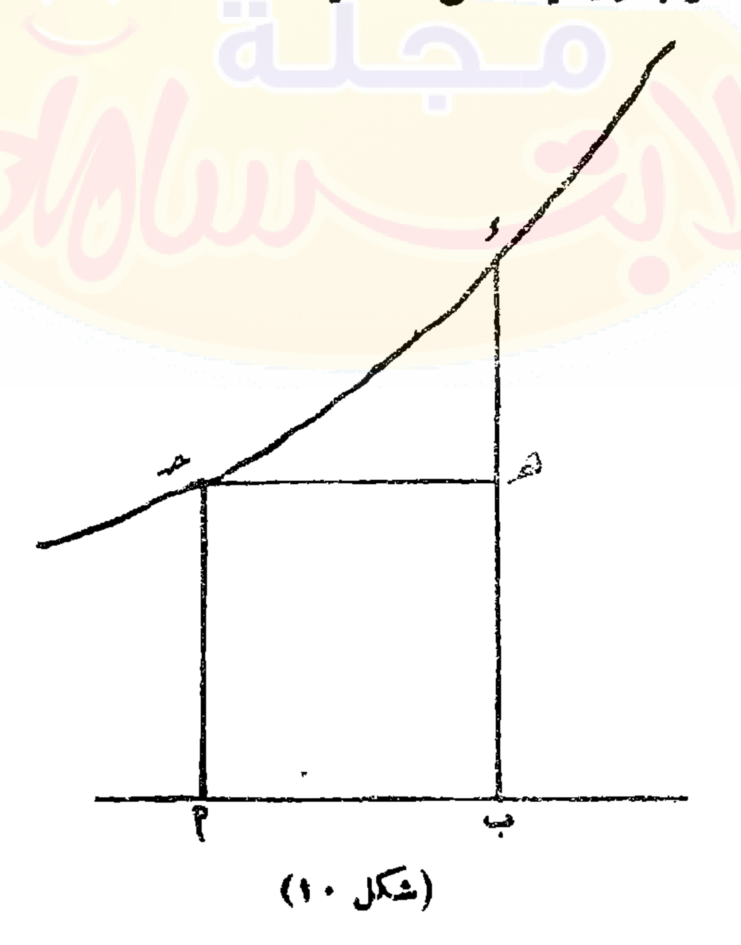
(ا) على الرجل أن يدفع بشدة لكى يحرك الهراسة . إنه يدفع للأمام (ص″ +) ولكن الهراسة لم تتحرك بعد بسرعة (صَ صغيرة والمنحنى ليس منحدراً)

(ب) الهراسة الآن فى حالة حركة . والرجل يمشى بجوارها ولكن يسمح لها بالدحرجة بدون دفع أو جر (ص″ = . لا توجد قوة) .

(ﺣ) لإيقاف الهراسة على الرجل أن يسحبها للخلف (ص″ −)

لاحظ أن الرجل يبذل أقصى جهده فى المرحلتين ا ، حـ
ولكن الحراسة تتحرك أسرع فى المرحلة ب . لا تحدث
أكبر قوة (ص″كبيرة) فى نفس الوقت مع أكبر سرعة
(صَ كبيرة)
يمكنك أن تجرب ذلك مع دراجة . باستعمال أكبر عجلة
للتروس ولاحظ (فى يوم هادئ) أنك تبذل جهداً فى
تحريك العجلة لا فى استمرار حركتها .

إذا أخذنا جزءاً من مائة جزء أو جزءاً من ألف جزء بدلا من جزء من عشرة أجزاء من الثانية لكنا قد وجدنا نتيجة أحسن، وإجابة أقرب إلى قيمة صَ الصحيحة .



(شكل ١٠)

ولذلك يمكن أن نشرح ماهية صَ بدون أن ندخل بالمرة فكرة السرعة . إذا بدأ الإنسان بالرسم البيانى وأخذ نقطة ب قريبة من ا ورسم الشكل ، وقاس : ء هـ ، حـ هـ ثم حسب $\frac{ء هـ}{حـ هـ}$ ثم بدأ ثانية : وأخذ ب أكثر قرباً من ا وقسم ء هـ على حـ هـ للشكل الجديد فإنه يلاحظ أنه كلما إزدادت ب قرباً من ا كلما اقتربت النتيجة من عدد معين . العدد الذى تقترب منه هو صَ : يمكننا إعتبار صَ مقياساً لانحناء المنحنى عند النقطة حـ .

بهذه الطريقة نكون قد أعطينا صَ معنى بعيداً تماماً عن فكرة الحركة . يمكن عمل نفس الشيء مع صً . ويمكن تطبيق هذه الرموز (كما ذكرت سابقاً) على مسائل عن شكل سلسلة معلقة أو قنطرة كوبرى . أو أحسن منحنى لأسنان عجلة التروس . ولا تعجب إذا وجدت أنه لا يزال هناك تطبيقات أخرى على صَ لا يدخل فيها الشكل أو السرعة . فمثلا يمكن أن تمثل س درجة حرارة جسم ، وتقيس ص كمية الحرارة الموجودة فى الجسم . حينئذ يمكن إعطاء صَ معنى . وحينما نجد الرمز صَ أو ، $\frac{ء ص}{ء س}$ لابد وأن يكون فى المسألة كميتان س ، ص مرتبطتان معاً

بحيث إن أى تغيير فى س يحدث تغييراً مباشراً فى ص .

لقد اضطررنا فى البداية إلى تعريف صَ كسرعة والآن يمكننا أن نستغنى عن هـذا التعريف . فإذا كان لديك بعض الخبرة بتطبيقات صَ المختلفة ربما يكون من الممكن اعتبارها كالعدد الذى يقترب من $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$ عندما تصغر $\triangle$ س صغراً كافياً . لكن لا تتسرع فى التفكير بهذه الطريقة . حتى ولو كان لك دراية بمعنى صَ فإنه كثيراً ما يكون من المفيد أن تعتبرها كسرعة أو كانحدار رسم بيانى .

استعمال الأفكار التقريبية

ربما لم تذهلك من قبل الفكرة الغامضة عن السرعة ، لقد كان من السهل تماماً أن نوضح السرعة المتوسطة ، فإذا قطعت عربة ٣٠ ميلا فى ساعة . هذا معنى بسيط وكاف . ولكن ما هى سرعتها عند لحظة التصادم بالضبط ؟ هذه عملية أكثر صعوبة . إن قياسها أصعب بكثير إذ علينا أن نقوم بعمليات صعبة للغاية . احسب السرعة المتوسطة فى الدقيقة السابقة للتصادم ، للثانية السابقة ،

لعشر الثانية السابقة وهكذا . لاحظ ما إذا كانت الإجابات تقترب من عدد معين . فإذا كانت كذلك فهذا العدد يمثل السرعة عند لحظة التصادم .

وفى الحقيقة للقيام بهذه العملية علينا أن نقيس فترات قصيرة جداً من الزمن :

جزءاً من مائة ، جزءاً من ألف ، جزءاً من مليون على الترتيب ، والمسافات القصيرة جداً التى قطعت فى هذه الأزمنة . وحتى بعد ذلك يجب ألا نكون متأكدين تماماً من الحصول على الجواب الصحيح . إنه من الممكن دائماً فى آخر جزء من بليون من الثانية أن يكون السائق قد ضغط على الفرامل بشدة عما قبل حتى أن السرعة فى آخر لحظة كانت فعلا أقل مما يجب أن نتوقعه من السرعة المتوسطة فى أثناء آخر جزء من مليون من الثانية .

يختلف المهندسون وعلماء الرياضة البحته فى نظرتهم لهذه المسألة . فالمهندس يعتقد أن هذا البحث مضيعة للوقت . فلا يهمه إذا كانت السرعة ٥٠ ميلا فى الساعة أو ٥٠,٠٠٠٣١ ميلا فى الساعة ، فهو لا يمكنه قياس السرعة بعد درجة معينة من الدقة كما أنه لا يرغب فى ذلك بأية طريقة . حتى لو ضغط على الفرامل

بشدة أكثر فى آخر جزء من مليون من الثانية فإنها سوف تغير السرعة بكمية صغيرة فقط . إن ما يهم المهندس هو أن السرعة المتوسطة لآخر جزء من مليون من الثانية تساوى السرعة عند لحظة التصادم .

لما لا يتفق عالم الرياضة البحتة مع وجهات النظر هذه ؟

لا يرجع هذا لهوى فى نفوس علماء الرياضة بل إلى عدة أسباب بعضها تاريخى . فى البداية كان ينظر لحساب التفاضل من الناحية العملية فقط . لقد اعتبرت فترات وجيزة من الزمن ، وعند حساب السرعة المتوسطة فرض أن فترة الزمن تساوى عدداً معيناً أكبر من الصفر . لكن ظهر فى النتائج أشياء غير مرغوب فيها ، ولذا استُدار علماء الرياضة ، وقالوا إن الفترة الوجيزة كانت من الصغر بحيث يمكن اعتبارها صفراً . وبذلك كان من الطبيعى أن يشعر الطلبة بغرابة هذا الموضوع . ورفض بعض علماء الرياضة أن يصدقوا أن مثل هذه الطريقة يمكن أن تؤدى إلى نتائج صحيحة . وبذلك اضطر علماء الرياضة أن يوضحوا هذا الخلط وأن يوجدوا طريقة أكثر دقة ومنطقا لشرح ما يقصدونه بالسرعة . سوف نجد فى كتب حساب التفاضل الحديثة التى وضعها الرياضيون الحديثون براهين طويلة ودقيقة للغاية ، مكتوبة بطريقة منطقية جداً . إنه من المستحسن أن تفهم هذه البراهين ، ولكن ليس

عند بداية معرفتك بحساب التفاضل أولا تعلم أن تستعمل حساب التفاضل، وأن ترى ما يمكن عمله به، وأن تشعر بماهيته. وفى طريقك إلى ذلك سوف تجد بالتدريج أنك أصبحت فى حاجة إلى أفكار أكثر دقة حينئذ يكون الوقت قد حان لدراسة الطرق الحديثة التى تعرف فى العادة بالتحليل.

هناك أسباب أخرى تجعلنا نستعمل السرعة الحقيقية. وهذا لشيء واحد هو أنه لم يتفق بعد على أصغر كمية يمكن اعتبارها. فالنجار يستعمل واحدا من المائة من البوصة والمهندس واحدا من ألف والعالم واحدا من مليون، ميكروبات، ذرات، أشعة ضوئية. ولمهندس الآلة البخارية يعتبر واحد من مائة من الثانية زمنا قصيرا. ولمهندس اللاسلكى الذى يفكر بملايين الدورات فى الثانية، واحد من الثانية زمن طويل. عالم الرياضة البحتة الذى نستعمل نتائجه بأى من هؤلاء الرجال يمكنه أن يتأكد من تحقيق جميع الرغبات الممكنة، فقط بإعطائه النتيجة الصحيحة.

مرة أخرى تكون النتيجة الصحيحة فى العادة أبسط من غير الصحيحة. فعندما درسنا سرعة الجسم المناظرة للصيغة ص = س^{٢} وجدنا نتائج تقريبية عديدة. فمثلا وجدنا أن السرعة بعد ثانية واحدة كانت واقعة بين ١,٩٩ ، ٢,٠١. نفرض أننا اكتفينا وقلنا أن ٢,٠١ نتيجة كافية. وهذه نتيجة أكثر تعقيداً

من القيمة الحقيقية . فإذا كنا فى أثناء عملنا قد اعتبرنا واحداً من المائة من الثانية فترة من الزمن صغيرة صغراً كافياً لأغراضنا لكنا قد توصلنا إلى الصيغة ص = ٢ س + ٠١ر تقريباً وهذه أكثر تعقيداً من النتيجة الصحيحة صَ = ٢س ، حتى المهندسون يستعملون ٢س كسرعة مناظرة إلى س٢ . وتمهد النتيجة البسيطة لتعريف أشياء أكثر تعقيداً .

وهناك كما ترى تبريراً عملياً أكثر للدقة المحببة إلى علماء الرياضة البحتة . ولكن هذا جانب واحد من المسألة . وهناك حالات كثيرة تكون فيها الفكرة التقريبية مساعدة للغاية . كثيراً ما تساعدنا الفكرة التقريبية للمسألة أن نرى ما تعنيه المسألة وأن نرى طريقا للحل . ربما يكون فى نتيجتنا خطأ مقداره بعض أجزاء من مليون ولكن سوف يكون كافياً لكى يعطينا فكرة عامة عن الحل . حينئذ نتمكن من فحص عملنا ومن أن نصقل كل مرحلة فى العمل حتى تصبح العملية كلها مضبوطة وإلا نبقى قانعين بالحل التقريبى للمسألة . كثير من المسائل التى يصعب حلها بالطرق المضبوطة يمكن للباحثين دراستها بالطرق التقريبية حيث تعطى النتائج مقربة إلى رقمين عشريين وهذا يكفى للغرض المطلوب .

نفرض مثلا أنه طلب منا إيجاد $\frac{ءص}{ءس}$ (أى صَ) المناظرة إلى الصيغة ص = لو س . هذه مسألة جديدة . إننا نعرف كيف نعالج كمية مكونة من قوى س² لكن لو س ليست من هذا النوع البسيط . فما الذى نفعله ؟

إن الطلبة الذين يدرسون لمجرد حل المسائل البسيطة بالطرق المدرسية لا يكون لهم بالطبع أية حيلة لمواجهة نوع جديد من المسائل . إنهم يواجهونها ولا يمكنهم أن يفعلوا شيئاً بالمرة . إنى أرجو ألا يجد القراء أنفسهم فى هذا الوضع بل يروا كيف يتفاعلون مع المشكلة وكيف يجدون لها حلا .

هل تعرف ما هى لوس؟ إذا كنت قد وجدت صعوبة فى الباب السادس فلا فائدة من قراءتك لهذا الباب . فإذا لم يكن عندك فكرة واضحة عن معنى لوس من العبث أن تتوقع فهم معدل تزايد لوس ، وإذا لزم الأمر فعليك بقراءة الباب السادس مرة أخرى . ارسم شكلا يبين العلاقة ص = لوس باستخدام جداول اللوغاريتمات (يقصد بالرمز لو س اللوغاريتم العادى كما هو معطى فى الجداول العادية) . لو س هو الرمز الكامل . هذا يعنى ،

باستعمال لغة الباب السادس ، أن « لفة كاملة واحده تناظر الضرب فى ١٠) . ارسم هذا الشكل لقيم س الواقعة بين ١ ، ١٠ بتعيين نقطة كافية لتعطى شكلا مضبوطاً . سوف تلاحظ أن الشكل يكون أكثر انحداراً عند س = ١ . وكلما زادت س قل انحدار الشكل . وبذلك تتوقع أن الصيغة التى تعطى صَ سوف تجعلها تقل بزيادة س .

يمكننا الحصول على فكرة تقريبية عن صَ بعمل تغيير مقدار ٠,١ فى س وملاحظة التغيير الذى يحدث فى ص . وقد بينا جزءاً من العمل فى جدول رقم ١٣ على الصفحة التالية ، وبدلا من كتابة قيم س فى صفوف عبر الصفحة تكون أكثر ملاءمة إذا كانت فى أعمدة .

جـــدول رقم ١٣

س	ص = لوس	△ص	$\frac{\triangle ص}{\triangle س}$
١	٠و٠٠٠٠	٠و٠٤١٤	٠و٤١٤
١و١	٠و٠٤١٤	٠و٠٣٧٨	٠و٣٧٨
١و٢	٠و٠٧٩٢	٩و٠٣٤٧	٠و٣٤٧
١و٣	٠و١١٣٩	٠و٠٣٢٢	٠و٣٢٢
١و٤	٠و١٤٦١	٠و٠٣٠٠	٠و٣٠٠
١و٥	٠و١٧٦١	٠و٠٢٨٠	٠و٢٨٠
١و٦	٠و٢٠٤١		
٢و٠	٠و٣٠١٠	٠و٠٢١٢	٠و٢١٢
٢و١	٠و٣٢٢٢		
١٠,٠	١و٠٠٠٠	٠و٠٠٤٣	٠و٠٤٣
١٠و١	١و٠٠٤٣		

يوجد فى العمود الأول قيم س ، ويزيد كل عدد بمقدار ١و٠ عن الذى قبله وبذلك يكون التغيير فى س، △ س دائماً ١و٠ ، ويعطى العمود الثانى لوغاريتم العمود الأول الموجود بجداول اللوغاريتمات كما يعطى العمود الثالث التغيرات الموجودة فى العمود الثانى ، △ ص . ويعطى العمود الرابع تقديرا تقريبياً عن السرعة

صَ ، بقسمة التغيير فى ص ، △ ص على التغيير المناظر فى س ، △ س . القسمة على ١ و هى تماماً كالضرب فى ١٠ . وبذلك تكون الأعداد التى فى العمود الرابع هى عشرة أصناف نظيرها فى العمود الثالث .

الجدول المعطى ص٢٧٦ ليس كاملا فقد حذفت الأعداد التى بين ٦و١ ، ٢,٠ والتى بين ٢,١ ، ١٠ وذلك لضيق المقام . هذه الفجوات يمكن للقارئ أن يكملها .

تعطينا الأرقام الموجودة فى العمود الرابع مقياساً تقريبياً لانحدار الرسم البيانى للدالة ص = لو س . ومن الواضح بالملاحظة أن الرسم البيانى يقل انحداره بازدياد س . المشكلة التالية هى إيجاد صيغة تربط هذه الأعداد . حيث إن الأعداد غير صحيحة فسوف نقنع بصيغة تحققها إلى حد ما كما إننا لا نتوقع تحقيقاً تاماً .

إن التفكير فى الصيغة الصحيحة فى العادة عمل شاق إذ يحتاج الاكتشاف الجديد إلى سنين طويلة . وعلى الإنسان ألا تثبط همته إذا استغرق بضع أسابيع فى حل مسألة من هذا الطراز . بل عليه أن يجرب فكرة بعد الأخرى حتى يصيب الجواب الصحيح .

إنه من المفيد أن يرسم الإنسان مجموعة من الأشكال البيانية لدوال مختلفة حينئذ يمكنه أن يرسم الشكل البيانى للجدول المعطى ويرى أى شكل بيانى أكثر شبهاً به .

ربما يجد الإنسان حلا لمسألتنا بمقارنة النتيجة عند س = ١ مع النتيجة عند س = ٢ ، قباله س = ١ لدينا فى العمود الرابع ٤١٤ و٠ وقباله س = ٢ لدينا ٢١١ و٠ وحيث إن ٢١١ و٠ هى تقريباً نصف ٤١٤ و٠ فإن هذا يوحى أن س = ٣ سوف تناظر ثلث ٤١٤ و٠ ، س = ٤ ربع ٤١٤ و٠ وهكذا

س = ١٠ يجب أن تناظر جزءا من عشرة من ٤١٤ و٠ أى ٠٤١٤ و٠

ويعطى الجدول ٠٤٣ و٠ وهى لا تختلف كثيرا . ٥ و١ يجب أن تناظر ٤١٤ و٠ مقسومة على ٥ و١ أى ٢٧٦ و٠ يعطى الجدول ٢٨٠ و٠ وهى على أية حالة قريبة قربا كنا نتوقعه من طريقة تقريبية كهذه .

هذا العمل يوحى أن سَ المناظرة إلى ص = لو س هى شيئا قريبا من $\frac{٠٫٤١٤}{س}$

يجب اعتبار هذه النتيجة كنوع من الإيحاء . إنها توحى إلينا أن نرجع إلى شرح اللوغاريتمات المعطى فى الباب السادس ، وأن نحاول أن نرى ما إذا كان هناك سببا واضحاً يعلل ازدياد لو س بمعدل يتناسب مع $\frac{١}{س}$. حقيقة إنه يوجد سبب ما ويمكن توضيح أن

$\frac{0{,}434294}{س}$ هو الجواب الصحيح لمسألتنا . إن طريقتنا التقريبية قد أوضحت لنا شكل الجواب وقربتنا للقيمة الحقيقية .

(فى الباب السادس شرحنا معنى $10^{س}$. ماهى الصيغة التى تعطى صَ إذا كانت ص = $10^{س}$ ؟) .

ربما نتذكر ماذكر فى الباب السادس أنه يمكن صنع المسطرة الحاسبة بأى طول ترغبه، فاذا وضعنا العدد ١٠٠ على بعد بوصة من طرف التدريج فان العدد س يحدث على مسافة لو س بوصة من نفس الطرف . ولكنه يمكننا أن نصنع مسطرة حاسبة تؤدى ذات الغرض إذا وضعنا ١٠ على أى بعد آخر . إن نتيجتنا عن صَ المناظرة إلى ص = لو س توحى بأنه جدير بنا أن نغير التدريج بطريقة عملية . فقد وجدنا أن صَ كانت تساوى $\frac{0{,}434292}{س}$ فاذا أخذنا بدلا من ص = لو س العلامة

ص = $\frac{لو\ س}{0{,}434294}$ لحصلنا على نتيجة أبسط . سوف تكون سَ حينئذ $\frac{1}{س}$ ، وسوف تؤثر قيمة س الجديدة أيضاً على المسافة التى عندها يجب أن نضع العدد س . فاذا وضعنا أى عدد س على بعد $\frac{لو\ س}{0{,}434294}$

بوصة من نهاية التدريج فإننا نحصل على مسطرة حاسبة بمقياس أكبر ولكنه لا يختلف عن المقياس السابق . توجد ١٠ على مسافة $\frac{\text{لو } ١٠}{٠,٤٣٤٢٩٤}$ وحيث إن لو ١٠ = ١ فهذه يمكن حسابها ، إنها تساوى ٢,٣٠٢٥٨ بوصة الآن يوجد العدد ٢,٧١٨٢٨ على بعد بوصة واحدة . هذا العدد مهم فى الرياضيات وقد أعطى له اسم خاص إذ دائما يسمى بالعدد هـ . إن المسافة التى عندها نضع أى عدد على هذه المسطرة الحاسبة الجديدة يسمى باللوغاريتم الطبيعى لهذا العدد اللوغاريتم الطبيعى للعدد س هو لو س .

فى البداية عندما شرحنا اللوغاريتمات بدلالة حبال ملفوفة على هـ أعمدة اعتبرنا أن تأثير اللفة الكاملة هو ١٠ والسبب الوحيد الذى جعلنا نفعل ذلك هو أنه لدينا بالصدفة عشرة أصابع ، فلو كان لدينا ثمانية أصابع فلربما أخذنا اللفة الواحدة تناظر العدد ٨ ،

ولكننا حصلنا بنفس الصورة على جدول اللوغاريتمات . وبسبب ذلك كان يجب علينا استعمال الرمز لو س . يمكن استعمال أى عدد آخر إذ ليس من الضرورى أن يكون عدداً صحيحا فمثلا يمكن استعمال العدد ٢$\frac{٥}{٨}$ وتوصل كل هذه الأرقام المختلفة إلى مساطر حاسبة جيدة تماما ولكن بأحجام مختلفة . إننا نحصل دائما على

$ص' = \frac{1}{س}$ حيث ا تقوم مقام عدد معين، ومن الطبيعى أن تفضل مجموعة اللوغاريتمات التى فيها ا = ١ لهذا السبب من المعتاد أن نستعمل فى الدراسة النظرية لو س، « اللوغاريتم الطبيعى . فإذا كانت

$$ص = لو_{هـ} س \quad فإن \quad ص'_{هـ} = \frac{١}{س}$$

مسألة عجلة العربة

نبحث الآن فى مسألة أخرى فيها الفكرة التقريبية ذات فائدة . إذا تدحرجت عجلة — مثلا عجلة عربة — على طريق مستو، فما مقدار السرعة التى تتحرك بها الأجزاء المختلفة ؟ بالتأكيد إنها لا تتحرك جميعها بنفس السرعة . إنك فى المعتاد تلاحظ عندما تمر بك عربة أنه يمكن رؤية القضبان السفلى التى تربط العجلة بمحورها بوضوح أما القضبان العليا فتتحرك بسرعة لدرجة تجعلها غير مرئية . كيف يمكن تفسير ذلك ؟

يجد إناس كثيرون أنه من الصعب أن يتبينوا عجلة متدحرجة، بالطبع ليس صعباً أن نتبينها بطريقة غير واضحة، ولكن من الصعب أن نتبينها بوضوح بحيث يمكن ملاحظة سرعة كل جزء فيها .

لذلك دعنا نستبدل بهذه المسألة أخرى أبسط منها . إنه من السهل أن نتخيل مربعاً متدحرجاً لمقطع مربع لكتلة كبيرة متدحرجة . إنها تبدأ بأحد الجوانب مستوياً وعندما تدور حول أحد الزوايا يصبح الجانب التالى مستوياً . ثم تدور حول الزاوية التالية وهكذا . إنه من السهل أن ترى أن الزاوية الموجودة فى أسفل المربع ، الزاوية التى يلف حولها الجسم كله ، تكون فى حالة سكون وكلما بعدت النقطة عن هذه الزاوية كانت حركتها أسرع .



(شكل ١١)

والآن دعنا نجعل الكتلة المربعة تقترب من الدائرة بعمل أربع قطوع مستقيمة بواسطة منشار لإزالة الزوايا الأربع للمربع كما فى شكل ١١ . إنه لا يزال من السهل جداً أن نتخيل الحركة كما

سبق فإن النقطة التى تلمس الأرض عندما يتدحرج الجسم تكون (فى أية لحظة) فى حالة سكون .

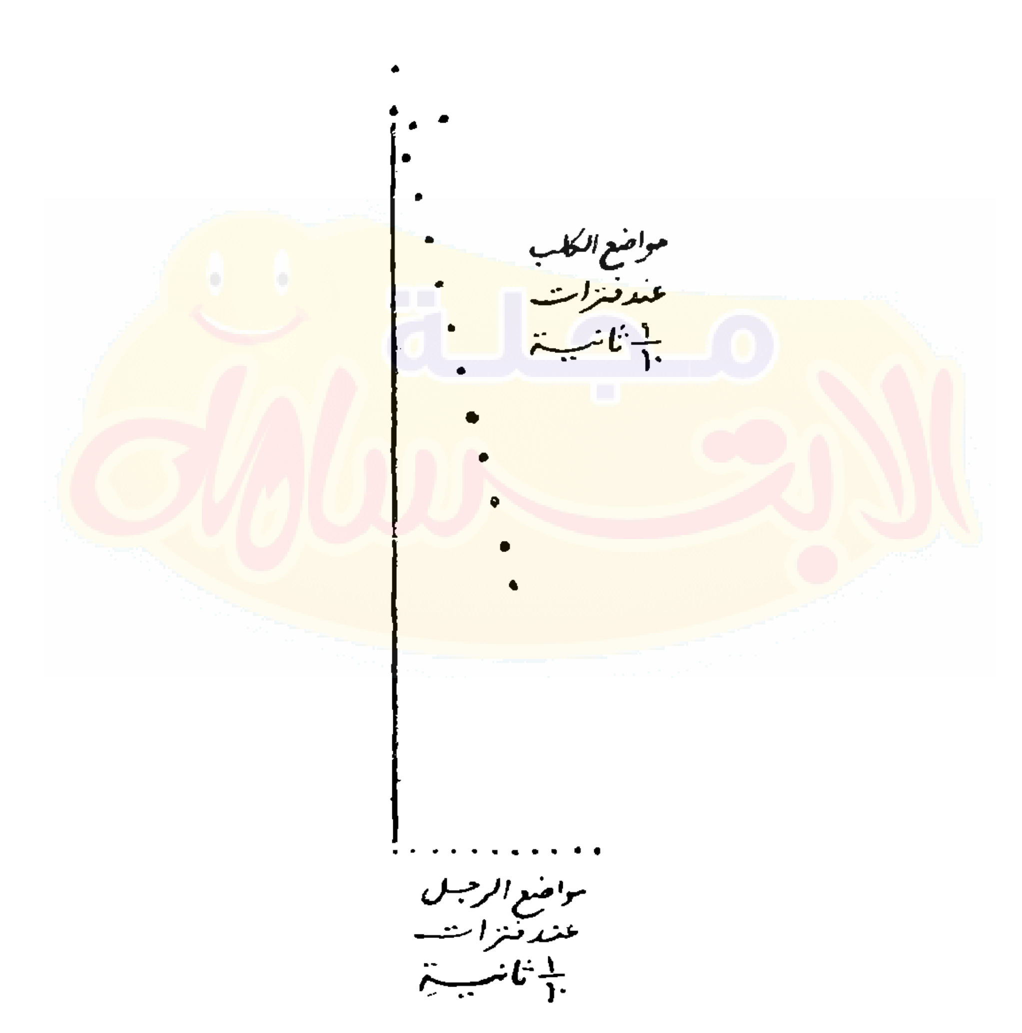
يمكننا أن نستمر بهذه الطريقة مزيلين الزوايا وجاعلين الشكل يقترب أكثر فأكثر من الدائرة . إنه لا يمكن أن يصبح دائرة ولكن من الممكن أن نجعله أقرب ما يكون من الدائرة بحسب الإرادة . يمكن للشكل الذى له ١٢٨ زاوية أن يستخدم كعجلة جيدة من الوجهة العملية .

وبذلك نكون قد توصلنا لنتيجة يجب أن يعرفها كل مهندس إن العجلة المتدحرجة تدور حول أسفل نقطة فيها وهى تكون (لحظيا) فى حالة سكون .

تمكننا نفس طريقة البحث السابقة أن نستنتج المنحنى الذى ترسمه أية نقطة على العجلة المتدحرجة . إن المنحنيات التى تظهر بهذه الطريقة هى المعروفة بالسكلويد ، إيبي سيكلويد ، هيبو سيكلويد .

فى عمل العجلات المسننة هناك منحنى خاص له ميزة عظمى إنه المنحنى المرسوم بنهاية خيط رفيع ملفوف عندما نحل الخيط من حول بكرة مثبتة . ربما يساعدك فى أن تعرف ما يفعله الخيط تماماً إذا تخيلت أن البكرة ليست دائرة كاملة ولكن شكلا له

بوصات للأمام . بهذه الطريقة سوف يقطع الرجل ٥ أقدام فى الثانية . وسوف يجرى الكلب فى سلسلة من الخطوط المستقيمة كل منها طولها ٢ قدم متجهاً بالترتيب نحو المواضع المختلفة التى يقف فيها الرجل برسم هذه السلسلة يمكننا أن نرى بالتقريب كيف يتحرك الكلب . وطول المسافة التى يقطعها ليصل إلى الرجل .



الباب الثانى عشر

مسائل أخرى على حساب التفاضل (١)

« إن لمن أشق الأمور أن تطالب إلى خبير فى موضوع ما شرح ماهية هذا الموضوع للرجل العادى وبيان سبب اهتمامه به إلى هذا الحد . »

س . ج . داروين ، مقدمة لقصة الرياضيات لمؤلفها د . لاريت

إن الذين يمهدون الطريق لأى موضوع يفعلون ذلك عن هواية . إنهم يبدأون بنفس المعلومات ، وبنفس طرق التفكير مثل أى شخص آخر غير مثقف . يمكن شرح الاكتشافات الأولى فى أى فرع من العلوم باللغة الدراجة . وهى تبدو فى العادة واضحة لدرجة تجعل العلم وكأنه لا يستحق الدراسة .

إن الأجيال الحديثة وهى تبنى على ما قام به الرجال الأولون تدرس أموراً أكثر تعقيداً ، وفى أثناء هذه الدراسة تتولد أفكار جديدة وكلمات جديدة وتعبيرات عملية تبدو غريبة على الرجل

(١) يمكن لمن يجد صعوبة فى هذا الباب أن يتجاوز عنه .

العادى . ويعبر عن الاكتشافات الحديثة فى أى علم بتعبيرات عملية تبدو غريبة علينا وصعبة للغاية على الفهم . والآن يبدو العلم صعباً لدرجة تجعله وكأنه لا فائدة من محاولة السيطرة عليه .

فى الرياضيات كما فى العلوم الأخرى يبنى كل جيل على الأساس الذى وضعه العاملون السابقون، ويضيف عليه طابقا جديدا . وحتى الآن أصبح البناء شيئا شبيها بناطحات السحاب . هناك كتب كثيرة مرموقة فى الدور الثامن عشر، ولكنها مكتوبة بلغة مفهومة فقط للذين هم معتادين على أبحاث الدور السابع عشر، وهكذا دور فدور حتى يصل الفرد للدور الأرضى وجدول الضرب .

لا يوجد على قيد الحياة من يعرف جميع الكشوف الرياضية التى تزخر بها مكتبات الجمعيات العلمية المختلفة فى أنحاء العالم، وعلى كل رياضى أن يكتشف لنفسه ماهى الأجزاء التى يجدها ذات فائدة فى موضعه الخاص ، والاصطلاحات الفنية ، والأفكار التى يسمح وقته بالتعرف عليها ليطبقها على مسائله الخاص .

فى هذا الباب سوف نناقش عددا من الطرق المفيدة لهؤلاء الذين تشغلهم العلوم البحتة — الطبيعة ، الكيمياء؛ الهندسة — ولهؤلاء الذين يستعملون أى نوع من الآلات من المثقب إلى الطائرة . ويزحف أيضا هذا النوع من الرياضيات إلى موضوعات

مثل علم الحيوان والاقتصاديات إلى علم النفس ، وإذا لم ترغب فى مثل هذه التطبيقات سوف لا تجد فى هذا الباب أى نفع ولا أى مراد لتعلم حساب التفاضل بالمرة مالم تكن ممن يعشقون الرياضيات لذاتها . فإذا لم تستحسن ، ولم تحتاج، إلى حساب التفاضل فإن دراسته تكون مضيعة للوقت .

فى سياق البحث العلمى كثيراً مايكون من الضرورى أن توجد $\frac{دص}{دس}$ لكميات مثل ص (س) أكثر تعقيدا من أية دالة سبق لنا اعتبارها . ربما يعثر الإنسان مثلاً على كمية مثل ص $= \left(\frac{س}{س^٢+١}\right)^٣$ ويرغب فى معرفه صَ المناظرة لها . قد أجريت هنا مجموعة كاملة من العمليات فاذا بدأنا بـ س علينا أن نحسب $س^٢$ ثم نضيف عليها واحد لتعطى $س^٢ + ١$. حينئذ تقسم س على $س^٢ + ١$ وترفع النتيجة إلى القوة ٣ .

لقد عولجت المسألة بتفتيتها : دعنا ندخل حروف جديدة لتجرى بها هذه الحلقة من العمليات. لحساب ص اضطررنا أولا لحساب $س^٢+١$ سوف نسمى هذه النتيجة الأولى ع ، ع $=$ $س^٢ + ١$ ماسرعه ازدياد ع ؟ إننا نعلم هذا من بحثنا السابق : عَ $=$ ٢ س : ثم نحسب $\frac{س}{س^٢+١}$ $(س^٢+١)$ هى نفس الشى مثل ع) .

سمى هذه النتيجة ف بحيث تكون $ف = \frac{س}{ع}$. والآن نعلم أن ع تزداد بمعدل عَ وأن س تزداد بمعدل ١ تحصل على ف بقسمة س على ع . وحيث إننا نعرف س ؛ ع ونعرف سرعة ازدياد كل منهما فيجب ألا يكون من الصعب إيجاد سرعة ازدياد ف :

نفرض أننا قد تمكننا من حل هذه المسألة وأوجدنا عَ . تقترب الآن من المرحلة الأخير . نحصل على ص برفع ف إلى القوة ٣ ، أى $ص = ف^٣$. ص هى $ف^٣$ ، ف تزداد بمعدل فَ . فما مقدار سرعة إزدياد ص ؟

(١) إيجاد عَ عندما $ع = س^٢ + ١$

(ب) إيجاد فَ عندما $ف = \frac{س}{ع}$ ، عَ تكون معلومة

(حـ) إيجاد صَ عندما $صَ = ف^٣$ ، ف تكون معلومة

وحيث إنه يمكن تفتيت المسائل المعقدة بهذه الطريقة إلى مسائل أبسط لذلك تجد نظريات خاصة فى كل الكتب الدراسة لحساب التفاضل تعالج تفاضل مجموع ، حاصل ضرب ، خارج قسمة ، ودالة الدالة . كل هذه النظريات لها غاية ، أن تمكنك من إيجاد صَ المناظرة لأية علاقة مهما كانت معقدة وذلك بتفتيت المسألة إلى مسائل أبسط .

تفاضل مجموع

خذ مثلا ، ارتفاع الأسعار . إفرض أن ص هو ثمن ساعة بعد س يوم من الحرب (مرتفعاً بمعدل صَ) ، ثمن سلسلة (مرتفعاً بمعدل عَ) ما هو معدل إزدياد ثمن الساعة والسلسلة ؟ من الواضح أنه صَ + عَ . وحيث إن الثمن هو ص + ع فهذا يبين مقدار السهولة التي يمكن بها إيجاد معدل زيادة مجموع كميتين متغيرتين .

تفاضل حاصل ضرب

نفرض أن ن هو عدد الرجال فى مدينة ، ق عدد لترات الماء التى يشربها كل رجل يومياً . يكون ن ق هو العدد الكلى للترات اللازمة . فإذا كانت ن تتزايد بمعدل نَ ، ق بمعدل قَ ما هو سرعة ازدياد ن ق ؟ الجواب هو قَ ن + نَ ق .

تفاضل خارج قسمة

إذا قدمنا ب برميل من الزيت إلى ن رجل، فكل رجل سوف ينال $\frac{ب}{ن}$ جزء من البرميل . فإذا زاد عدد الرجال بمعدل نَ ، وعدد

البراميل بمعدل بَ ما هي سرعة تغير $\frac{ب}{ن}$ ؟ الجواب هو

$\frac{بَ ن - نَ ب}{ن^{٢}}$. لاحظ كيف أن هذا الجواب يتفق مع الواقع .

إذا كانت نَ = ٠ فهذا يعنى أن عدد الرجال بقى كما هو وعندما تكون ب′ + فهذا يعنى أن عدد البراميل متزايد . فى هذه الحالة $\frac{ب}{ن}$ تكون متزايدة ، ومعدل تغيرها يجب أن يكون + وهذا يتفق مع القانون السابق . من الناحية الآخرى إذا بقى عدد البراميل كما هو أى ب′ = ٠ بينما كان عدد الرجال متزايد بحيث تكون ن′ + يصبح القانون $\frac{- ن′ ب}{ن^{٢}}$ بإشارة سالبة كما يجب أن يكون.

ويبدأ نصيب كل رجل يقل ، ويكون أى تغيير إلى أسوأ ، ولذا تكون الإشارة السالبة متوقعة .

دالة الدالة

إنه من المستحسن عند هذه المرحلة أن ترجع إلى موضوع حساب الفروق المحدودة وتقرأ مرة أخرى الكلمات التى توضح معنى أن ص

دالة فى س وبالذات أن ص مرتبطة مع س بقاعدة ما . والآن ماذا تكون دالة الدالة ؟

اعتبر العلاقة $ص = لو_{هـ} (س^{٢} + س)$ يمكننا عمل جدول ص بالطريقة الآتية : فى العمود الأول ندخل الأعداد س . فى العمود الثانى يمكننا إدخال الأعداد المناظرة $س^{٢} + س$. فى العمود الثالث يمكننا وضع لوغاريتمات (الأساس هـ) الأعداد الموجودة فى العمود الثانى .

يعطى هذا العمود الثالث الأعداد $لو_{هـ} (س^{٢} + س)$. لدينا س فى العمود الأول ، ص فى العمود الثالث . دعنا نسمى الأعداد الموجودة فى العمود المتوسط ع . يمكن الحصول على الأعداد الموجودة فى العمود الثانى من تلك الموجودة فى العمود الأول بقاعدة محددة . لذا فإن ع دالة فى س . ويمكن الحصول على الأعداد الموجودة فى العمود الثالث بقاعدة محددة من تلك الموجودة فى الثانى . لذا فإن ص دالة فى ع .

إن هذه العملية هى التى ينتج عنها اسم « دالة الدالة » وفى الحقيقة ، $ع = س^{٢} + س$ ، ص = لو ع .

الآن نعلم كل شيء عن القاعدة التي تربط س مع ع ونعرف كل شيء عن القاعدة التي تربط ع مع ص . لذا يجب ألا يكون صعباً أن نجد مقدار سرعة تزايد ص .

إنه من الممكن أن نوضح هذا الاتصال الثنائي بواسطة آلة . ويمكن إظهار العلاقة ع = $س^2$ + س بواسطة رسم بياني . في شكل ١٢ يمثل المنحنى و ب مجرى محفور على هيئة هذا الرسم البياني . و ا ، و حـ مجريان مستقيمان . تمثل ا قطعة معدنية صغيرة منزلقة على المجرى و ا . وبنفس الطريقة تنزلق ب ، حـ في المجرى و حـ . مثبت عند ب حلقة صغيرة وخلال هذه الحلقة تمر القضبان ا ب ، حـ ب وهما ملتصقان مع الجزئين المنزلقين ا ، حـ بطريقة تجعل ا ب دائماً أفقياً . فإذا تحركت ا ، فإن ب تتحرك وهذه بدورها تلزم حـ على الحركة . تمثل س المسافة و ا ، تمثل ع المسافة و ع . وأي تغيير في س ينتج تغييراً في ع .

الآلة مصممة بحيث أن ع = $س^2$ + س .

بنفس الطريقة يمكننا أن نوضح العلاقة ص = لو$_{هـ}$ ع . يمثل ص الطول و هـ ، وكما تبين ع الطول و حـ . والمجرى المنحنى ز ى هو

الرسم البيانى للدالة ص = $هـ^{لوع}$. القضيب حـ ى دائماً أفقى بينما ى هـ دائماً رأسى كلاهما يمر خلال الحلقة عند ى . .

الآن يمكننا رؤية التسلسل بالكامل للعمليات إذا تغيرت س (و ا) ، فإن ع (و حـ) لا بد وأن تتغير ولأن و حـ قد تغير فإن و هـ (ص) يجب أيضا أن يتغير .

ما مقدار سرعة التغير ؟ إننا نعلم أن $\frac{ى ع}{ى س}$ هى معدل تزايد ع بالنسبة إلى س وأن $\frac{ى ص}{ى ع}$ هى معدل تزايد ص بالنسبة إلى ع وعلى ذلك فإن معدل تزايد ص بالنسبة إلى س هو $\frac{ى ص}{ى ع} . \frac{ى ع}{ى س}$ أى أن

$$\frac{ى ص}{ى س} = \frac{ى ص}{ى ع} . \frac{ى ع}{ى س}$$

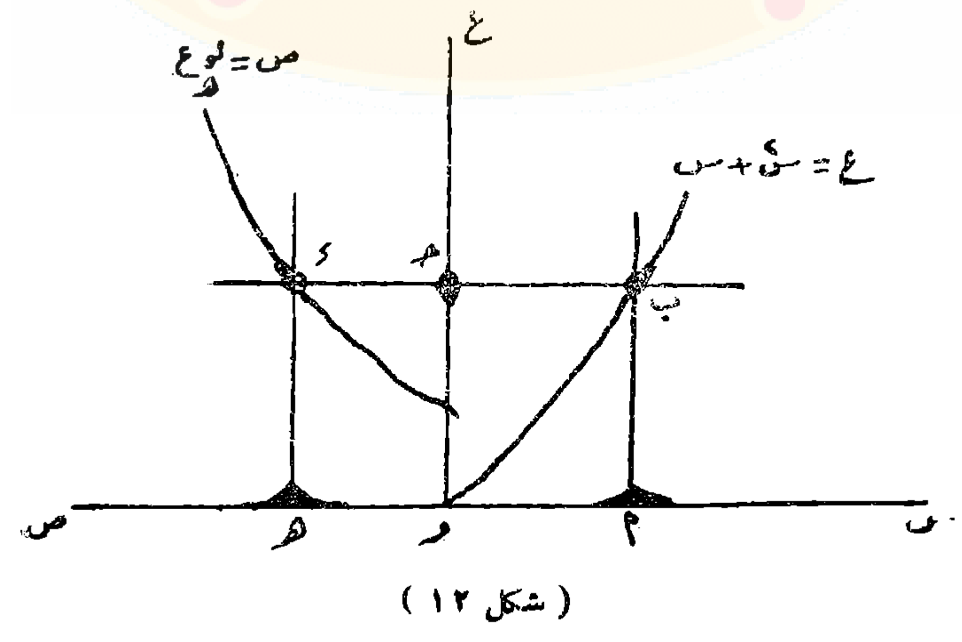
يعطى هذا نظرية عن دالة الدالة ومعدل تغيرها .

إنه من السهل فى مثالنا بالذات أن نوجد $\frac{ى ص}{ى س}$. إذ علينا إيجاد $\frac{ى ص}{ى ع}$ ، $\frac{ى ع}{ى س}$ ثم حاصل ضربهما . ليس هناك أية صعوبة مع $\frac{ى س}{ى ع}$ حيث أن ع = $س^2$ + س فإن $\frac{ى ع}{ى س}$ = ٢ س + ١ . والآن

لإيجاد $\frac{ءص}{ءع}$ حيث ص = لو ع . رأينا فى الباب الحادى عشر أن لو س تتزايد بمعدل $\frac{١}{س}$. ، يتزايد اللوغاريتم الطبيعى لأى عدد بمعدل يساوى مقلوب هذا العدد ، وليس هناك أى فرق إن سمينا العدد ع أو س لذلك فإن $\frac{ءص}{ءع} = \frac{١}{ع}$ تبعاً لذلك فإن $\frac{ءص}{ءس}$

$$= \frac{١}{ع} (٢س + ١)$$

ولكن اختصار للعدد $س^٢ +$ س الموجود فى العمود الثانى وعلى ذلك يكون الجواب مساويا $\frac{٢س + ١}{س^٢ + س}$ وهذا هو حل المسألة .



(شكل ١٢)

بتجميع النتائج المذكورة سابقاً يكون من الممكن إيجاد $\frac{ء ص}{ء س}$ لعلاقات أكثر تعقيداً .

التكامل

لقد اعتبرنا من قبل موضوع التفاضل — أى عملية إيجاد السرعة صَ لجسم يتحرك بطريقة يعبر عنها بعلاقة مع ص .

كثيراً ما تحدث العملية العكسية : هذا هو موضوع التكامل.

لسنا فى حاجة بالطبع أن نعتبر أن صَ هى سرعة جسم متحرك . إنها تمثل معدل تغير ص مهما كانت ص . إنه من السهل مثلا أن تكشف ازدياد الضغط كلما إزداد الغاطس عمقاً فى البحر . لذلك يمكن أن تمثل ص الضغط على خوذة الغاطس بالقدم المربعة عندما يكون على عمق س قدماً . إنه من السهل الحصول على معدل التزايد صَ . ولكى توجد ص يجب أن نحل مسألة التكامل (إنها سهلة جداً فى هذه الحالة بالذات .)

أيضاً يستعمل التكامل عند إيجاد ضغط الهواء على ارتفاعات مختلفة ، وهو موضوع ذو نفع لمتسلق الجبال ، وللطيارين ولخبراء الطقس ولغيرهم . وهناك فروع قليلة ؛ إن وجدت ، فى العلوم والهندسة لا يظهر فيها موضوع التكامل . فى معالجة أية مسألة

عملية على الطالب أن يفعل شيئين : أولا يجب أن يضع المسألة فى قالب رياضى ، ثم بعد ذلك يجرى العمليات الرياضية اللازمة لحل المسأله : ولا فائدة من هذا العمل الأخير بغير العمل الأول وعلى ذلك فدراستنا للتكامل سوف يكون لها غرضان :

(ا) أن نتفهم طبيعة التكامل بوضوح بحيث نتعرف بسرعة على أية مسأله يمكن حلها بواسطة التكامل

(ب) أن نتمكن من الطريقة الرياضية .

يمكن تفهم الجزء الأول (ا) ولو أننا سوف نرجع إلى (ب) رجوعاً عابراً .

سوف نعتبر مسأله بسيطة للغاية مسأله يمكن حلها رياضيا فى سطرين — وسوف نفحصها من جميع الوجوه : سوف نطبق على هذه المسأله البسيطة طرقا كفيلة بحل مسائل أصعب منها بكثير. فى الحقيقة سوف نستعمل مطارق بخارية لنفتت بها أجسام صلبة سوف لا يكون الغرض من ذلك تفتيت الأجسام الصلبة ولكن لنبين كيف تعمل هذه المطارق البخارية . إن مسألتنا البسيطة هى كالآتى :

إذا كانت صَ = س أوجد العلاقة مع ص . هذه المسألة فى وضعها الحالى ليست كاملة تماما . لدينا صَ التى يمكن أن تمثل سرعة جسم بعد س ثانية . ومن الواضح أنه يجب أن نعرف من أين بدأ الجسم إذا طلب منا تعيين موضعه . لذلك سوف نفرض

أننا نعلم أن ص = . عند س = . المسألة الآن محددة تماما . ويمكننا أن نعتبر ص على أنها بعد الجسم عن نقطة ثابتة ق . ولنبدأ بالجسم عند ق حيث إن المسافة ص تساوى صفرا فى البداية . ثم يبدأ الجسم بعد ذلك فى الحركة فتكون سرعته بعد ثانية واحدة قدماً واحدة فى الثانية ، وبعد ثانيتين تكون سرعته قدمين فى الثانية وهكذا . إن السرعة لا تزيد طفرة واحدة ولكن بانتظام . ذلك لأن ص = س تخبرنا بأن السرعة تكون $1\frac{1}{8}$ قدم/ ثانية بعد $1\frac{1}{8}$ ثانية ، وتكون $1\frac{1}{4}$ قدم/ ثانية بعد $1\frac{1}{4}$ ثانية وهكذا. لدينا الآن صورة كاملة عن الحركة .

طريقة الأقطار التقريبية

دعنا نحاول أولا وقبل كل شيء الحصول على فكرة تقريبية عن المسافة التى يقطعها الجسم، مثلا ، فى الثانية الأولى .سوف نقسم الثانية إلى عشرة أجزاء متساوية ، ونرى مقدار ما يمكن أن نعرفه عن المسافة التى يقطعها الجسم فى كل عشر ثانية . فى العشر الأول من الثانية يتحرك الجسم بسرعة تتزايد بانتظام من صفر البداية إلى ١ و . عند النهاية . وعلى ذلك تقع السرعة المتوسطة بين .١و ٠و. وتكون المسافة المقطوعة أكبر من صفر مضروبا فى ١و. ولكن

أقل من ١و٠ مضروباً فى ١و٠ يمكننا أن نطبق نفس الطريقة على كل من الأجزاء الأخرى . المسافة المقطوعة أى ١و٠ من الثانية أكبر من ١و٠ مضروبا فى أقل سرعة وأقل من ١و٠ مضروبا فى أكبر سرعة فى أثناء هذا الجزء . ويمكننا أن نضع ذلك فى جدول .

جـــدول ١٤

المسافة المقطوعة

الزمن	أقل سرعة	أكبر سرعة	على الأقل	على الأكثر	الفرق
صفر إلى ١و٠	صفر	١و٠	صفر	٠١و٠	٠١و٠
١و٠ إلى ٢و٠	١و٠	٢و٠	٠١و٠	٠٢و٠	٠١و٠
٢و٠ إلى ٣و٠	٢و٠	٣و٠	٠٢و٠	٠٣و٠	٠١و٠
٣و٠ إلى ٤و٠	٣و٠	٤و٠	٠٣و٠	٠٤و٠	٠١و٠
٤و٠ إلى ٥و٠	٤و٠	٥و٠	٠٤و٠	٠٥و٠	٠١و٠
٥و٠ إلى ٦و٠	٥و٠	٦و٠	٠٥و٠	٠٦و٠	٠١و٠
٦و٠ إلى ٧و٠	٦و٠	٧و٠	٠٦و٠	٠٧و٠	٠١و٠
٧و٠ إلى ٨و٠	٧و٠	٨و٠	٠٧و٠	٠٨و٠	٠١و٠
٨و٠ إلى ٩و٠	٨و٠	٩و٠	٠٨و٠	٠٩و٠	٠١و٠
٩و٠ إلى ٠و١	٩و٠	٠و١	٠٩و٠	١و٠	٠١و٠
		المجموع	٤٥و٠	٥٥و٠	١٠و٠

فى العمود الأول لدينا الأجزاء العشرية التى قسمت إليها الثانية

الأولى . ثم يتبعها أقل سرعة وأكبر سرعة فى كل جزء من الحركة .
ولدينا بعد ذلك عمودان يبينان ١و. مضروبا فى أقل سرعة ، ١ر. مضروبا فى أكبر سرعة . ففى كل عشر ثانية يقطع الجسم مسافة أكبر من التى تقطع فى العشر السابق وأقل من التى تقطع فى العشر التالى . ويبين العمود الأخير الفرق بين العمودين السابقين فمثلا ، نعلم أنه فى الفترة بين ٦و. ، ٧و. يقطع الجسم مسافة على الأقل ٠٠٦و. وعلى الأكثر ٠٧ر. الفرق بينهما ٠٠١و. . وبذلك نكون غير واثقين من صحة المسافة المقطوعة فى أثناء هذه الفترة إلى مدى واحد من المائة. ويمكن أن نحصل بالجمع على المسافة الكلية المقطوعة فى الثانية الأولى ، وهى أكبر من ٤٥و. قدم وأقل من ٦٥ر. قدم .

لدينا الآن فكرة تقريبية عن مقدار ما يقطعه الجسم فى الثانية الأولى . الفرق بين ٤٥,٠ ، ٥٥و. هو ١ر. ينتج هذا الخطأ ١و. من خطأ مقداره ١٠ر. فى كل من العشرة صفوف . فإذا رغبنا فى نتيجة أكثر دقة سوف يكون من الضرورى أن نقوم بنفس العمل مستعملين فترات أصغر . فمثلا يمكننا أن نقسم الثانية الواحدة إلى ١٠٠ جزء ثم نقوم بعملية حسابية مشابهة ، ولو أنه بالطبع سوف يكون أداء ذلك طويلا ومملا . بأية درجة سوف تقربنا مثل هذه الطريقة للنتيجة الصحيحة ؟ سوف يكون الفرق بين أكبر وأصغر سرعة فى جزء صغير ٠١و. بدلا من ١و. ويمكن الحصول على

المسافة المقطوعة فى ١٠ر. من الثانية بضرب السرعة فى ١٠ر. . وبذلك سوف يكون الخطأ فى المسافة المقطوعة فى جزء من المائة من الثانية ١٠ر. —أى ٠٠٠١ ر . ولكنه سوف يكون هناك مائة صف فى الجدول (بدلا من عشرة) فيكون الخطأ فى المسافة الكلية ١٠٠ضعف ٠٠٠١ر. أى ١٠ر. (فى الحقيقة كان يجب أن نثبت أن المسافة كانت أكبر من ٤٩٥ ر وأقل من ٥٠٥ ر.) . تكون درجة الجودة لهذه النتيجة عشرة أضعاف المرة السابقة ، لقد حصلنا على ذلك نتيجة لعملنا الذى زاد إلى عشرة أضعاف . وإذا أخذنا فترات أكثر يمكننا الحصول على نتائج أحسن .

تستعمل هذه الطريقة فقط عندما تكون المسألة من الصعوبة بدرجة لا تجدى معها أية طريقة أخرى . حتى فى هذه الحالة يجب أن نختصر خطوات العمل . لم تعط هذه الطريقة كوسيلة مثلى للحصول على الجواب الحقيق ، ولكن لكى تبين ما تقصده المسألة . سوف تساعدك الطريقة السابقة على أن تتفهم الرمز المستعمل للتكامل .

لقد استعملنا قبلا △ س رمزاً للتغيير فى س . فى الجدول السابق مثل كل صف فى العمود الأول تغييراً مقداره ١ر. ، فمثلا من ٧ر. إلى ٨ر. . يعطى العمودان التاليان أصغر سرعة وأكبر سرعة

أى أنهما يساعداننا على معرفة مقدار السرعة صَ فى أثناء هذه الفترة من الزمن . وبنفس الطريقة يعطى العمودان الرابع والخامس عدداً أقل وعدداً أكبر من المسافة المقطوعة فى أثناء أية فترة صغيرة من الزمن . وحيث إن صَ مضروبة فى الزمن الذى يمضى فى △س تقيس المسافة المقطوعة ، فإنه يمكننا أن نعتبر هذه الأعمدة وكأنها تمثل صَ △ س .

بالطبع هناك بعض الشك حول معنى صَ : فمثلا عندما تتغير س من ٦ر٠ إلى ٧ر٠ تتغير صَ أيضاً من ٦ر٠ إلى ٧ر٠ وتكون قيمة صَ غير واضحة فإما تساوى ٦ر٠، وإما ٧ر٠، وإما عدداً ما بينهما . وبسبب عدم التأكد هذا ، نأخذ عمودين أحدهما تحت عنوان « على الأقل » والآخر « على الأكثر » .

يمكننا بعد ذلك تقدير الساعة المقطوعة فى كل الثانية الأولى بجمع العمودين الرابع والخامس وبذلك يكون مجموع صَ △س على الأقل ٤٥ر٠ وعلى الأكثر ٥٥ر٠

لدينا الآن تقديران ، أحدهما صغير جداً والآخر كبير جداً . ولكن لحسن الحظ عندما نأخذ فترات أصغر من الزمن أى باتخاذ △س ٠١ر٠ أو ٠٠١ر٠ ، إلخ يصغر الفرق بين هذين

التقديرين إلى درجة كبيرة . وفى عبارة أخرى إذا أخذنا △س صغيرة جداً فإنه لا يهمنا كثيراً إذا أخذنا صَ أكبر أو أصغر سرعة تحدث فى فترة الزمن △س . سوف يكون الجواب واحداً فى كلتا الحالتين . وإذا لم يكن كذلك فعلينا إدخال رمز جديد مثل ص′ △ س (ل) ليعنى «أقل سرعة ، ص′ مضروبة فى التغير فى س ، △س . وحيث إن الحالة ليست هكذا فإن ذلك يكون مضيعة للوقت . إن أقل سرعة وأعلى سرعة يعطيان نتائج تقرب من بعضها جداً كلما صغرت △س

ذكرنا فى الباب العاشر أن $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$ يزداد إقترابها من عدد معين كلما صغرت △س . سمى هذا العدد $\frac{ى ص}{ى س}$

بنفس الطريقة ، يمكن تمثيل العدد الذى كنا نوجد قيمة ، وهو أكبر من ٠٫٤٥ وأقل من ٠٫٥٥ ، أكبر من ٠٫٤٩٥ وأقل من ٠٫٥٠٥ إلخ بالمقدار $\int_0^1$ ص′ ى س . والرمز $\int$ هو الحرف S الموجود فى كلمة sum . ويبين الرمز أنه يمكن إيجاد العدد بضرب ص′ فى △ س لكل فترة وجيزة من الزمن ، ثم بعد ذلك نجمع

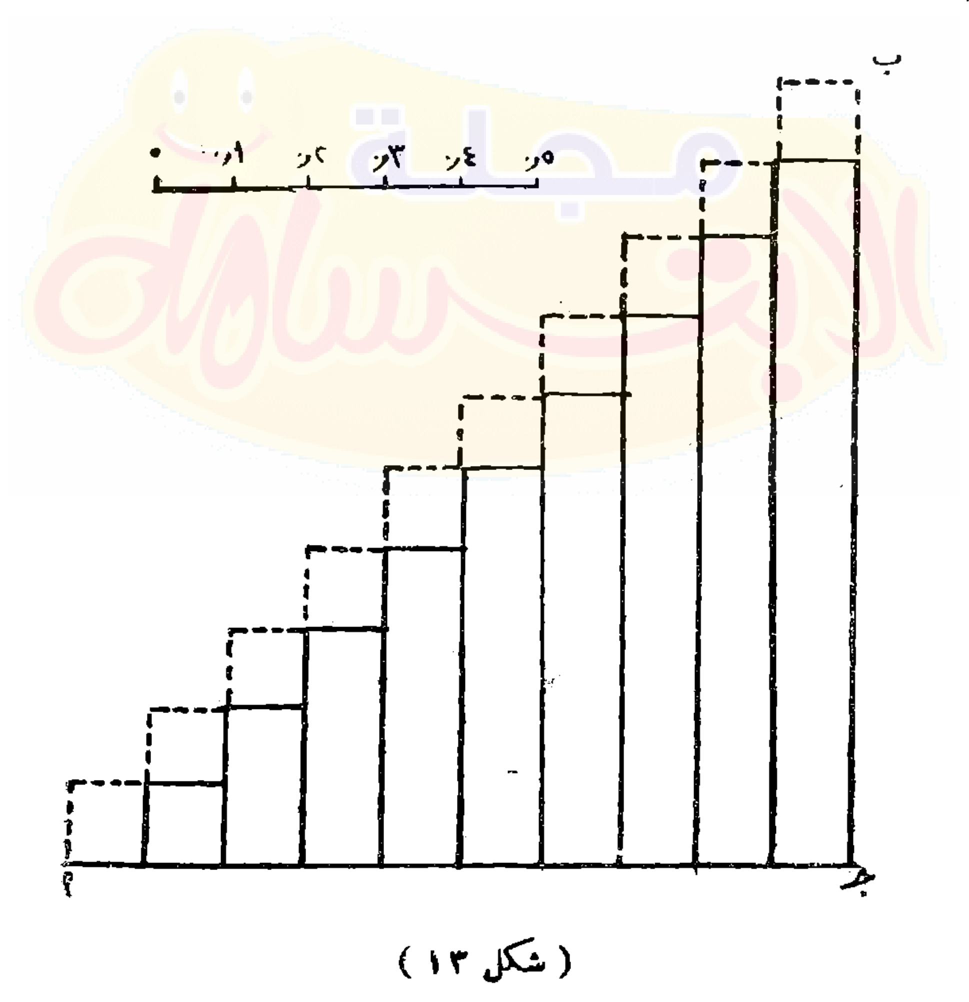
هذه الكميات ونلاحظ ما يحدث عندما △س تصغر جداً . ولقد أدخل العدادان ٠ ، ١ لكى نبين أن المسافة قطعت خلال الثانية الأولى أى بين س = ٠ ، س = ١ . بمعنى آخر يجب أن نقسم التغير فى س من ٠ إلى ١ إلى كميات صغيرة △س كما فى العمود الأول من الجدول . وتمثل $\int_{٢}^{٥}$ ص′ ءس المسافات المقطوعة فى الفترة الزمنية ما بين ثانيتين إلى ٥ ثوان بعد البداية . يمثل $\int_{٠}^{ن}$ ص′ ءس المسافة المقطوعة فى أول ن ثانية وحيث إننا قد افترضنا أن ص′ تعطى الصيغة ص′ = س فإنه يمكن وضع س بدلا من ص′ فتكتب $\int_{٠}^{١}$ سءس . مما سبق يبدو من المحتمل أن الذى نبحث عنه هو العدد ٥و . ويمكن إثبات أن ذلك هو الجواب الصحيح بالرمز ، ٥و = $\int_{٠}^{١}$ سءس . وتعرف $\int$ بأنها علامة التكامل .

يقصد بالتكامل عملية تجميع وإنى أعتقد أن الاسم قد اختير لأن العملية تتكون من تجميع مجموعة من الكميات الصغيرة ، جميع التغيرات الصغيرة فى ص التى حدثت فى لحظات الزمن القصيرة الماضية .

طرق فهم التكامل

إنه من المفيد أن تعرف طرق مختلفة تعطى نفس النتيجة . حينئذ يمكن فى أية مسألة اختيار الطريقة الأكثر ملاءمة .

يمكن تعريف الرمز $\int_{0}^{1}$ س ء س بأنه المسافة المقطوعة فى الثانية الأولى لجسم سرعته دائما مساوية لعدد الثوانى التى مرت (باحتساب كسور الثانية) .



(شكل ١٣)

لكن نبين مثل هذه الحركة يمكننا استعمال الطريقة المبينة فى بداية الباب الحادى عشر . إنه سوف يكون من الصعب أن نجعل السرعة ص- دائماً مساوية تماماً لعدد الثوانى س . دعنا مرة أخرى نقتنع بطريقة تقريبية . دع سن القلم خلال عشر الثانية الأول يبقى ساكناً فى الفتحة ا ب . وخلال عشر الثانية التالى دعه يتحرك لأعلى بسرعة ١,٠ قدم فى الثانية : دع السرعة من س = ٢,٠ إلى س = ٣,٠ تكون ٢,٠ قدم فى الثانية وهكذا .

فى الحقيقة دع السرعة خلال أية فترة معطاة فى العمود الأول الجدول ١٤ تكون مساوية للعدد المعطى فى العمود الثانى لذلك الجدول . سوف يتكون الرسم البيانى الناتج من خطوط مستقيمة متصلة ببعضها على شكل سلسلة . وكما رأينا فى الباب الحادى عشر ، تقيس ص- إنحدار هذه الخطوط . وحيث إن ص- تزيد بانتظام سوف يكون كل خط أكثر انحداراً من الذى يسبقه . وبذلك فقد كان من الممكن أن نوضح عملية التكامل إذا طلبنا أن نرسم منحنى معلوماً انحداره عند كل نقطة .

يمكن أيضاً إيضاح جدول ١٤ مباشرة إذ يمكن الحصول على الأعداد الموجودة فى العمود الرابع بضرب تلك الموجودة فى العمود الثانى فى ١,٠ ولكن يمكن تمثيل عملية الضرب ، مثلا ٠,٩ فى ١,٠ ، بمساحة مستطيل أضلاعه ٠,٩ ، ١,٠ كما يمكن تمثيل

الأعداد العشرة الموجودة فى العمود الرابع بمساحة عشرة مستطيلات كما فى شكل ١٣ . مجموع هذه الأعداد ٤٥و٠ ، يمثل المساحة الكلية الموجودة أسفل الخط المتصل فى نفس الشكل تمثل المساحة أسفل الخط المتقطع ٥٥و وهو مجموع الأعداد الموجودة فى العمود الخامس .

يوجد بين الخطوط المتقطعة والخطوط المتصلة عشرة مربعات. كل منها مساحته تساوى ٠١و٠ ، تمثل هذه المربعات الأعداد الموجودة فى العمود الأخير .

إننا نعرف أن $\int_{0}^{1}$ س ى س تمثل عدداً أكبر من المساحة الموجودة أسفل الخط المتصل ، وأقل من المساحة الموجودة أسفل الخط المتقطع . باتخاذ ١٠٠ خطوة بدلا من عشر خطوات نحصل على نتيجة أحسن للعدد الذى نريده . ولكن مهما كثر عدد الخطوات فإن الخط المتصل دائماً يقع أسفل الخط المستقيم ا ب والخط المتقطع يقع فوقه . فإذا رسمنا الخط ا ب فإن مساحة المثلث ا ب ح تكون دائماً أكبر من المساحة أسفل الخط المتصل ، وأقل من المساحة أسفل الخط المتقطع . فى الحقيقة المساحة ا ب ح تساوى العدد الذى نبحث عنه ، $\int_{0}^{1}$ س ى س .

هذه النتيجة عامة فإذا كانت د (س) أية دالة فى س فإن

$\int_{ب}^{ا}$ د (س) ء س يمثل دائما المساحة أسفل الرسم البيانى للدالة د (س) بين س = ا ، س = ب . إن مسألة إيجاد مساحة داخل منحنى هى مسألة تكامل يجب أن تحاول بنفسك أن ترسم المساحة التى تمثل $\int_{٠}^{١}$ س^{٢} ء س . العلاقة بين التكاملات والمساحات مفيدة من ناحيتين : أولا : يمكننا استعمال المساحة لكى توضح معنى التكامل ولكى تساعدنا على تفهم طبيعة التكاملات . ثانياً : يمكننا الحصول على القيمة الحقيقية لمساحة معينة بحساب قيمة التكامل .

طرق مختصرة

يمكن إيجاد قيمة التكامل $\int_{٠}^{١}$ س ء س بمجهود قليل جداً . لقد بدأنا المسألة بمحاولة إيجاد ص بحيث تكون ص َ = س ، ص = ٠ عندما س = ٠ (انظر صفحة ٣١٠).

ولكننا نعلم أن السرعة ص َ = ٢ س تناظر العلاقة ص = س^{٢} ، ٢ س هى بالضبط ضعف ما نريده لقيمة ص َ . ويمكننا تصحيح ذلك باتخاذ نصف مقدار ص ، أى باعتبار الصيغة ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} . وهذه تعطى تماما القيمة الصحيحة ،

ص َ = س . أيضاً $\frac{١}{٢}$ س^{٢} تساوى صفرا عند س ٠ . وهذا يحقق الشرط ص = ٠ عند س = ٠ . ولذلك فإن ص = $\frac{١}{٢}$ س^{٢} هى العلاقة التى نبحث عنها . إنها تعطى المسافة ص المناظرة إلى س ثانية . بوضع س = ١ نجد ص = $\frac{١}{٢}$. ولذا فإن المسافة المقطوعة فى ثانية هى $\frac{١}{٢}$. هذه تتفق مع النتيجة ٥ر٠ التى أوجدناها بالطريقة الأخرى .

يمكن حل الكثير من مسائل التكامل بهذه الطريقة . الفكرة فى غاية البساطة . لقد تعلمنا قبلا كيف نوجد ص′ المناظرة للصور المختلفة الكثيرة للدالة ص . والآن المطلوب حل المسألة العكسية : ص′ هى المعطاة والمطلوب إيجاد ص . إنه من الطبيعى أن نرجع إلى ما ذكرناه عن المسألة الأولى فإذا وجدنا ضمن ذلك صورة ص′ المطلوبة فإنه يمكن حل المسألة فى الحال . فمثلا : لقد أوضحنا أن ص = لو$_{هـ}$ س تناظرها ص′ = $\frac{١}{س}$. فإذا طلب منا أن نوجد $\int \frac{١}{س}$ ءس فهذا تماما مثل قولنا : إذا كانت ص′ = $\frac{١}{س}$ فما هى ص ؟ من الواضح أن ص = لو$_{هـ}$ س تعطى جوابا لهذا السؤال . الجواب الكامل سوف يتوقف على شرط

آخر أنه ليس بكاف أن تعرف مقدار سرعة جسم يتحرك بل على الإنسان أن يعرف أيضا مكانه عند لحظة ما .

المعادلات التفاضلية

يؤدى عدد كبير من المسائل العملية إلى ما هو معروف بالمعادلة التفاضلية . يمكن أن نفهم جيدا ماهية المعادلة التفاضلية بالنظر إلى المثال الآتى :

ينتشر الضوء من مصباح كهربائى فى جميع الاتجاهات بدرجة واحدة ، وكثيراً ما يكون هذا غير مرغوب فيه — كما هو الحال عند عمل كشاف : إننا نفضل أن يكون الضوء كله فى اتجاه واحد ، وهذا يتم بوضع عاكس خلف المصباح . فإذا خرج الضوء المنعكس فى حزمة كاملة . ما هى الصورة التى يجب أن يكون عليها العاكس ؟

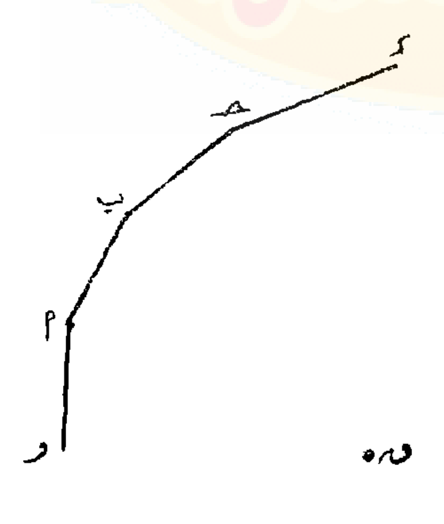
إنه من المعلوم كيف ينعكس الضوء عندما يسقط على مرآه إذا أخذنا الحرف v ووضعنا تحته خط هكذا v_ يكون لدينا صورة تقريبية عما يحدث . الخط يمثل المرآة ، والذراع الأيسر للحرف v يمثل الضوء الساقط على المرآة ، والذراع الأيمن يمثل الضوء

المرتد من المرآة . يجب أن يصنع زراعا الحرف ٧ نفس الزاوية مع خط المرآة . ترتدكرة البلياردو تقريبا بنفس الطريقة إذا لم يكن هناك دوران .

سوف لا نحصل على حزمة متجمعة إذا وضعنا مرآة مستوية عادية خلف المصباح إذ يتفرق الضوء المنعكس فى إتجاهات مختلفة كما يتضح ذلك بيانيا .

يمكننا أن نحاول المسألة باتخاذ عدد كثير من قطع المرايا الصغيرة محاولين وصلها فى شكل سلسلة ما بحيث نحصل على حزمة مناسبة فى شكل ١٤ تمثل ں النقطة التى يوضع عندها المصباح الكهربائى (و) نقطة ما أخرى . ويراد الحصول على حزمة ضوئية فى الاتجاه و ں . يمثل و ا قطعة صغيرة من المرآة موضوعة بحيث إن الضوء الصادر من ں ملاقيا المرآة عند(و) ينعكس فى اتجاه الخط و ں

وبالطبع الضوء الصادر من ں ملاقيا المرآه بين و ، ا ينعكس منحرفا إلى أعلى قليلا بعيدا عن و ں ولكن إذا كان الطول و م قصيرا



(شكل ١٤)

سوف لا يكون هذا الانحراف كبيرا . عندما نصل إلى ا نصل قطعة المرآة التالية ا ب بحيث ينعكس شعاع الضوء ں ا فى الاتجاه المناسب أى موازيا و ں . بنفس الطريقة يجب علينا أن ندير قطعة المرآة التالية ، ب حـ ، بحيث ينعكس الشعاع ں ب موازيا و ں ، وهكذا تستمر النتيجة : نضيف كل مرآه بحيث إن أسفل نقطة فيها تمس أعلى نقطة فى المرآة التى تسبقها ثم تدار بحيث تعكس الضوء فى الاتجاه المناسب .

بهذه الطريقة يمكننا تركيب مرآه تعطى تقريبا حزمة متوازية. كلما صغرت قطع المريا المستعملة كانت الحزمة أحسن . ويمكننا أن نصدق بسهولة أنه يوجد منحنيا يعكس الضوء تماما فى الاتجاه الصحيح . يسمى هذا المنحنى قطعا مكافئا . تسمى المرآه التى تتركب بهذا الشكل مرآه مكافئة

يستعمل هذا النوع من المرايا فى بعض أنواع التليسكوبات ، وفى الحزم اللاسلكية تستعمل أسلاك مشكلة فى صوره قطع مكافى رأسى . لاحظ كيف كونا سلسلة الخطوط و ا ب حـ ى . . بدأنا عند (و) وعند كل مرحله أحطنا علما بالاتجاه المطلوب . أية مسألة تبدأ بقاعدة ما حول الاتجاه اللازم اتباعه عند أية لحظة تؤدى إلى معادلة تفاضلية .

مثلا يمكن لسفينة فى البحر أن تتجه نحو فنار . يمكنها أن تبدأ من أى مكان تشاء . ولكن بمجرد أن تبدأ يجب تعيين الاتجاه الذى يجب أن تسير فيه . يمكن اعتبار الفنار وكأنه مغناطيس يجذب السفينة : وبلغة المغناطيسية تسير السفينة فى أحد خطوط القوى . إنه يمكن للمسألة أن تكون أكثر تعقيدا إذا كان هناك مغناطيسان يجذب كل منهما جسما متحركا . حينئذ لا يكون مسار الجسم واضحا كما فى حالة السفينة والفنار . لذلك فإن المعادلات التفاضلية تظهر مع نظرية الكهرباء والمغناطيسية .

كيف تبدو المعادلة التفاضلية برموز جبرية ؟ لدينا قاعدة ما ، تعطينا إتجاه المنحنى عند أية نقطة . ويمكننا أن نقول أيضا إن لدينا قاعدة تعطى انحدار المنحنى عند أية نقطة . يقاس انحدار المنحنى بواسطة ص . ويتعين موضع أية نقطة على رسم بيانى بواسطة العددين س ، ص . ولكل نقطة يوجد اتجاه يناظرها : يمكننا أن نتخيل هذا إذا فرضنا أن ورقة الرسم البيانى مغطاة بأسهم صغيرة ولافتات عليها الرسالة الآتية : « إذا وصلت إلى هذه النقطة ارحل فى هذا الاتجاه » وباستمرار تتبع اللافتات يمكن الفرد أن يتتبع أى منحنى .

وتنظم اللافتات طبقاً للقاعدة : إذا كانت لدينا أية نقطة مناظرة

لأى عددين س ، ص فهناك قاعدة تعطى اتجاه اللافتة إذ يقاس انحدار السهم بواسطة صَ ، وهناك أيضاً قاعدة معينة تعطى صَ ، أى أن هناك قانوناً يعطى صَ عندما تكون س ، ص معلومتين.

فمثلا إذا وضع فنار عند (٠ ، ٠) فإن جميع السفن تبحر متجهة نحوه وتكون الصيغة صَ = $\frac{ص}{س}$. لأن $\frac{ص}{س}$ هو ميل المستقيم الذى يصل أية نقطة (س ، ص) بالنقطة (٠ ، ٠)، وهذا يساوى صَ

سوف لا يمكنك تتبع هذه المناقشة إذا لم تكن الهندسة التحليلية مألوفة لديك : يجب أن تتمكن من مبادئ الهندسة التحليلية (تعيين النقط ، ميل الخطوط المستقيمة ، الزوايا بين الخطوط المستقيمة ، المسافة بين نقطتين ، معادلة الدائرة) قبل أن تحاول أن تتعلم نظرية المعادلات التفاضلية .

أمثـــــلة

لم تكن معالجة الموضوعات فى هذا الباب كاملة حتى تبرر وضع نماذج وسوف يجد القراء الذين تمكنوا من تتبع الفكرة العامة لهذا الباب نماذجاً فى الكتب الدراسية لحساب التفاضل والتكامل .

الباب الثالث عشر

حساب المثلثات

أو كيفية حفر الأنفاق ورسم الخرائط

« يجب اتخاذ أقصى احتياط ممكن لتتجنب الأخطاء . ويبين ذلك الدقة المتناهية التى تتخذ عند حفر الأنفاق ... فعند تصميم نفق Muscontcony الذى يبلغ طوله ٥٠٠٠ قدم كان الخطأ صغيراً جداً أما فى نفق Hoosac الذى يبلغ طوله ٢٥٠٠٠ قدماً فكان الخطأ لا يكاد يذكر »

أ . ويليمز

لقد حاولت فى هذا الكتاب أن أبين :

(ا) أنه يمكن دراسة المسائل الرياضية بلغة سهلة .

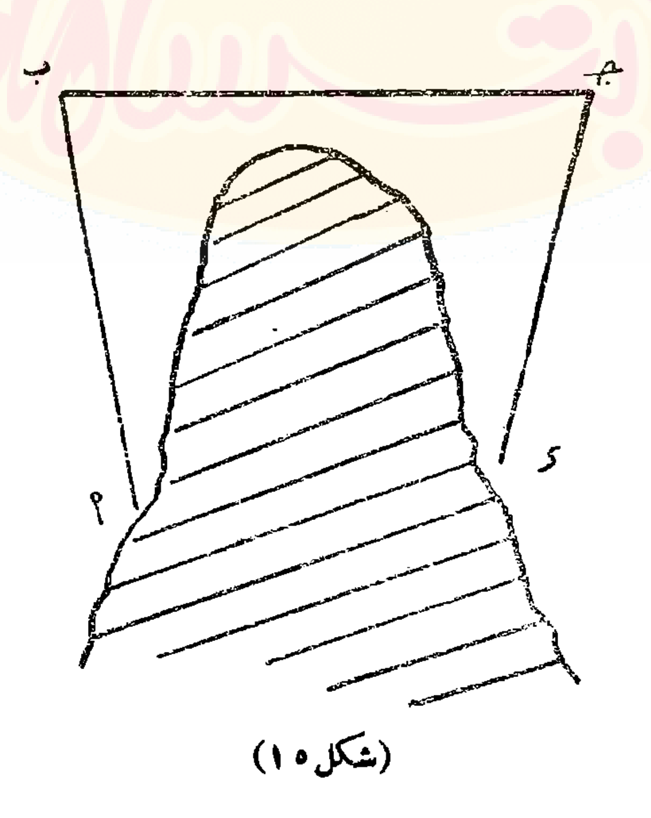
(ب) أنه يمكن لأى فرد عادى أن يفكر بنفسه فى هذه المسائل مستعملا المنطق السليم .

(حـ) أن الطرق المبينة فى الكتب الدراسية إنما تمثل ببساطة التحسينات التى أدخلت على المحاولات الأولية التى قد بنيت تدريجياً بفضل أجيال من علماء الرياضة .

لكى نوضح هذا لا يوجد أفضل ، فى أى جزء من الرياضيات ، من حساب المثلثات . يظهر حساب المثلثات فى مسائل عملية بسيطة للغاية ، كبناء نفق سكة حديدية مثلا وربما كان من الضرورى عمل نفق يمتد بعيداً لأميال عديدة عبر سلسلة من الجبال ، إلى نقطة لا يمكن من جانبنا أن نراها . وأحيانا يكون من الضرورى حفر النفق من كلا النهايتين ليتقابلا فى نقطة ما بعيدة داخل الجبل .

كيف يمكن إيجاد الإتجاه الصحيح الذى نبدأ فيه الحفر ؟

شكل ١٥ يوضح إحدى الطرق المشروحة فى الباب الرابع من كتاب السكة الحديدية لمؤلفه ا . ب . شيلدروب . يمثل الجزء المظلل أرضاً مرتفعة . والمطلوب أن نصل ما بين النقطتين ا ، ى بنفق .



(شكل ١٥)

ربما كان من الممكن تعيين نقطتين مثل ب ، حـ بحيث يمكن رؤية ب من ا ، حـ من ب ، ء من حـ ونقيس بعناية طول واتجاه الخطوط ا ب ، ب حـ ، حـ ء .

تكفى هذه البيانات لتعيين موضع ء . إنها سوف تمكننا من عمل خريطة للمنطقة تبين ا ، ب ، حـ ، ء بمقياس قدماً واحدة مثلا للميل

نبدأ من ا ونرسم الخطوط من ا إلى ب ، من ب إلى حـ ، من حـ إلى ء فى الاتجاهات المناسبة وبنفس مقياس الرسم . وهكذا نعين ء . وعلى الخريطة يمكن أن نرسم الخط ا ء وأن نقيس الزوايا التى يصنعها مع ا ب ، حـ ء وبذلك نعرف فى أى الاتجاهات نبدأ الحفر عند ا ، ء .

تبين هذه الطريقة أنه يمكن حل المسألة بطريقة منطقية سليمة ولوأنها ليست متقنة تماماً حيث إننا نعمل بمقياس رسم قدم واحدة للميل فأى خطأ مقداره $\frac{1}{100}$ من البوصة فى رسمنا يؤدى إلى خطأ $1\frac{1}{2}$ ياردة على الطبيعة . وفى أثناء رسم الشكل من السهل الوقوع كثيراً فى مثل هذه الأخطاء . لذلك فإن رسم الشكل ليس كافياً لكى يعطى نتائج مضبوطة . ولكن لكى يعطى فكرة عامة عما يحتاج إليه . وفى العادة تبين المحاولات الأولى نشأة الفكرة . ثم علينا أن ننميها حتى تصبح عملية . تمر الاكتشافات الرياضية

بنفس المراحل التى تمر بها الاكتشافات الميكانيكية : أولا فكرة ثم لعبة ثم غرض تجارى .

يمثل حساب المثلثات محاولة لتحسين طريقة الرسم . إن المحاولة تجرى بالطريقة الآتية : برسم الخريطة بمقياس أكبر يمكننا الحصول على إجابة أكثر إتقاناً لمسألة النفق . لكن يبدو أنه ليس هناك حدا لدرجة الإتقان التى يمكن الحصول عليها بتكبير الرسم . يمكننا الحصول (بالرسم بمقياس كبير) على طول واتجاه ا ى بدرجة كبيرة من الدقة إذا حصلنا على أطوال واتجاهات الخطوط ا ب ، ب حـ ، حـ ى بدرجة مماثلة من الدقة .

يبدو أنه من المحتمل وجود قاعدة ما تربط النتائج مع الحقائق المعطاة . يمكننا جمع معلومات عن المسألة باتخاذ ا ، ب ، حـ ، ى فى مواضع مختلفة . ثم نحاول أن نلاحظ الطريقة التى يعتمد بها طول وإتجاه حـ ى على القياسات الأخرى المعطاه . سوف يكون الغرض إيجاد قاعدة : وبمجرد حصولنا على هذه القاعدة يمكننا من حساب ا ى بأية درجة من الدقة نريدها بدون الاستعانة برسم ما .

لذلك يمكن فى حساب المثلثات أن تعتبر أن المسائل التى يمكن حلها بالرسم مسائل ذات إجابات محددة . (إنه مضيعة للوقت أن تحاول فى حساب المثلثات أية مسألة إذا لم تكن قد أعطيت البيانات التى تمكنك من حلها بالرسم : إن حساب المثلثات

ليس سحراً) : أولا سنحاول أن نكتشف القاعدة التى تعطى هذا الجواب بحيث نكون قادرين أن نستنتج الجواب بقانون بدلا من الرسم . الغرض إذن هو استبدال الرسم بالحساب .

مثل هذا الموضوع يمكن حله عملياً فى المرحلة الأولى فقط . فالأطوال والاتجاهات أشياء حقيقية تتبع قوانين خاصة بها . وبملاحظتها يمكننا استنتاج خواصها .

ولكن بالطبع سوف نبدأ بإجراء تجارب على مسألة النفق والنقط الأربع ا ، ب ، ح ، ء . وليس من الحكمة فى شىء أن نحاول مباشرة مسألة من طابع جديد . بل من المستحسن أن نحاول مسألة أكثر بساطة ولكن من نفس الطابع ، أجر تجاربك عليها ، وانظر إذا كانت الطريقة التى تحل المسألة البسيطة تلقى ضوءاً على المسألة المعقدة . فى رسم الخرائط أبسط المسائل هى المتعلقة بثلاث نقط فقط (ومن ثم سمى حساب المثلثات أى علم الثلاثة مستقيمات) . كما إن من السهل دراسة المثلثات القائمة الزوايا بالذات .

قياس الزوايا

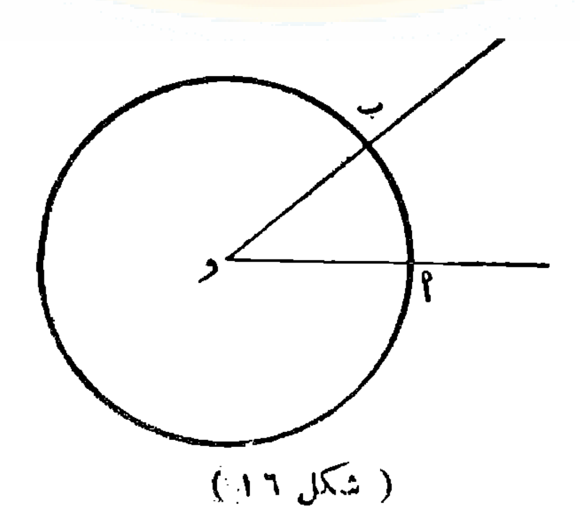
إنه من السهل أن تقيس طول خط مستقيم . ولكنه ليس من الواضح الكيفية التى تقيس بها زاوية . هناك طريقتان :

الطريقة الأولى ، القياس بالدرجات ، إنها تشترك بعض الشيء مع العلامات الموجودة على وجه الساعة . توضع على وجه الساعة الأعداد من ١ إلى ١٢ على مسافات متساوية حول الحافة . فإذا دار عقرب الساعات من ١٢ إلى ٣ فإننا نعرف أنه قد دار ربع لفة . ولكى نحصل على الدرجات ، تقسم الدائرة ، لا إلى ١٢ ، بل إلى ٣٦٠ جزءاً متساوياً . وكل جزء يسمى درجة . ليس هناك سبب قوى لاختيار العدد ٣٦٠ ، ويناظر الدوران حول ربع الدائرة (زاوية قائمة) ٩٠ درجة ، تختصر فى المعتاد إلى ٩٠° . الزاوية بين ١٢ ، ١ تناظر ٣٠° .

تعرف الطريقة الثانية بالتقدير الدائرى ، وهى بالذات مناسبة للمسائل المتعلقة بالسرعة . ويمكن شرحها كالآتى : نفرض أن لدينا عجلة نصف قطرها ١ قدم مثبتة حول محور . يمر خيط حول حافة العجلة مثبت أحد طرفيه فيها أشبه ما يكون بحبل الرافعة ، وبسحب الخيط تدور العجلة . من الواضح أنه يمكننا أن نقيس المقدار الذى قد دارته العجلة بقياس طول الخيط المنتشر . فعندما يكون قد إنتشر ١ قدم من الخيط يقال إن العجلة قد دارت س زاوية نصف قطرية .

إنه من السهل قياس زاوية بالتقدير الدائرى ، خذ قطعة من الخشب مقطوعة على شكل دائرة نصف قطرها الوحدة . ولكى

تقيس زاوية معينة نضع مركز الدائرة « و » عند رأس الزاوية وتعين النقط ا ، ب حيث يتقاطع ضلعا الزاوية مع الحافة (شكل ١٦). ثم تلف شريط قياس حول الحافة (غير المستقيمة) وتقيس المسافة من ا إلى ب فعندما تكون هذه $\frac{٥}{٨}$ قدم تكون الزاوية $\frac{٥}{٨}$ زاوية نصف قطرية . ولكى نحصل على زاوية مقدارها ١٠ زوايا نصف قطرية نقيس ١٠ أقدام حول الحافة . بالطبع سوف تكون اكثر من لفة واحدة : حينما تنتهى نحصل على زاوية مقدارها ١٠ زوايا نصف قطرية . إذا دارت عجلة مركزها ثابت ونصف قطرها قدم واحدة بمعدل زاوية نصف قطرية فى الثانية فإن أية نقطة على المحيط تتحرك بمعدل قدم واحدة فى الثانية . وبذلك تكون الزوايا نصف القطرية مناسبة للمسائل الميكانيكية كالحبال الملفوفة حول عجلات ، أو لعجلات تتدحرج على الأرض ، وعموماً فهى تناسب الأغراض النظرية . وإذا



(شكل ١٦)

رأيت فى أى كتاب عن الرياضيات أى قول عن « زاوية س » أو الزاوية ٣,٥ » بدون ذكر أى شىء آخر ، يجب أن تعرف أن ذلك يعنى « س زاوية نصف قطرية » أو ٣,٥ زاوية نصف قطرية وليست س درجة أو ٣,٥ درجة ، عادة تكتب ٣,٥ درجة هكذا ٣,٥° . وإذا لم يذكر شيئاً عن الدرجات تكون الزاوية بالتقدير الدائرى . التقدير الدائرى هو الأكثر استعمالا عند علماء الرياضة حيث أنه يعطى أبسط النتائج .

إذا قست محيط دائرة نصف قطرها ١ قدم سوف تجد أنه حوالى ٦,٢٨ قدم . وبذلك فإن اللفة الكاملة ، ٣٦٠° ، تساوى ٦,٢٨ زاوية نصف قطرية . وليس ٦,٢٨ مما يستحب ولا حيلة لنا فيه فهو نتيجة طبيعية فى الوجود وليس خطأ من علماء الرياضة . فلا يمكننا التخلص منه . وإذا قسنا بالدرجات لكى ما تكون اللفة الكاملة عدداً مناسباً ، ٣٦٠° ، نجد أن الصعوبة تنتقل إلى جهة أخرى . فعندما تدور عجلة بسرعة ٣٦٠° فى الثانية فإن سرعة النقط التى على الحافة (بفرض أن نصف القطر كما سبق ١ قدم) تكون ٦,٢٨ قدم فى الثانية لذلك تستعمل الزوايا نصف القطرية فى معظم المسائل المرتبطة بالسرعة أو بمحيطات الدوائر : يمكن استعمال الدرجات عندما نقيس زوايا الأشكال التى لا تتحرك ، الحقول مثلا .

وإذا لم تكن قد تعودت بعد على التقدير الدائرى فمن المفيد أن تقص دائرة كبيرة وتضع المقياس حول الحافة ، الدرجات والزوايا نصف القطرية . فعندما تجد كمية مثل ٢٠٢° أو ٢,٧٨ زاوية نصف قطرية يمكنك أن تنظر إلى دائرتك وأن ترى الزوايا التى تمثلها هذه الكميات . سوف يكون من المستحسن أن تضع ٠° عند موضع الساعة الثالثة ثم تدور اتجاه عكس عقارب الساعة لكى تنطبق ٩٠° على القمة (الساعة ١٢) ، ١٨٠° على الساعة ٩ ، ٢٧٠° على الساعة ٦ ، ٣٦٠° مرة ثانية على الساعة ٣ .

سوف تكون أيضاً صفر زاوية نصف قطرية عند الساعة ٣ ، ١,٥٧ عند الساعة ١٢ ، ٣,١٤ عند الساعة ٩ ، ٤,٧١ عند الساعة ٦ ، ٦,٢٨ مرة أخرى عند الساعة ٣ . لقد تعود علماء الرياضة أن يفكروا بالزوايا وهى فى هذه الأوضاع . ومن المستحسن أن نتبع نفس الطريقة .

الجيوب وجيوب التمام

يمكننا الآن الاستمرار فى تجاربنا على المثلثات القائمة الزوايا . مرة أخرى يجب أن نؤكد أن بداية الموضوع يجب أن تكون عملية . لا يمكننى أن أتصور نجاحاً لأى إنسان إذا جلس متأملا

لمثلث قائم الزاوية متوقعاً أن يلهم بطريقة ما لحل المسألة . يجب أن نبدأ بالتجارب ثم نرى ما تقدمة لنا من نتائج .

مسألة : يصنع خط سكة حديد زاوية مقدارها ٥° مع المستوى الأفقى : فإذا قطع قطار ١٠٠٠٠ قدم فى اتجاه هذا الخط . ما هى عدد الأقدام التى يرتفعها ؟ ليس هناك فائدة فى التفكير . دعنا نقيس ونرى . نجد أن يكون الجواب صحيحاً لأقرب عشر أقدام هو ٨٧١٫٦ قدم (يجب أن تصدقنى فى هذا ما لم تكن مستعداً لإجراء التجربة بنفسك) . ليس هناك بالذات شيئاً بسيطاً عن الجواب : إنه لا يوحى بأية طريقة لحساب النتيجة غير القياس .

ولكن هذه النتيجة تؤدى خدمة هامة لنا : إنها تعنى أننا سوف لا نحتاج لعمل أية قياسات أخرى لهذا النوع بالذات لسكك حديدية مرتفعة ٥° . فإذا طلب منا المقدار الذى يرتفعه القطار إذا قطع ١٠٠ قدم فإننا نعرف الإجابة فى الحال . حيث إن الخط مستقيم فإن القطار يصعد بانتظام . ففى ١٠٠٠٠ قدم سوف يصعد ١٠٠ ضعف ما يصعدة فى ١٠٠ قدم . وعلى ذلك ففى سفر طوله ١٠٠ قدم يصعد ٨٫٧١٦ قدم . فى الحقيقة يرتفع ٠٫٠٨٧١٦ قدم لكل قدم يقطعة (صحيحاً لخمسة أرقام عشرية) . فإذا قطع س قدم فإنه يرتفع ٠٫٠٨٧١٦ س قدم .

وبنفس الطريقة يناظر أية زاوية (مقيسة بالتقدير الدائرى

أو الدرجات) عدداً . فعندما نقطع س قدم على مستوى مائل بزاوية ١٣° فإننا نصعد ٢٢٤٩٥و س قدم : القانون الذى يناظر ٣٠° هو ٥٠٠٠٠و س (لاحظ أن هذه أولى نتائجنا البسيطة ، ½ س تناظر ٣٠°) إنه من المناسب أن يكون لديك طريقة مختصرة للرجوع إلى الأعداد التى تنشأ بهذه الطريقة . لذلك سوف نعطيها اسماً ، الجيوب . (يرجع الاسم للوقت الذى كان يتراسل فيه المتعلمين فى جميع البلاد باللاتينية . إنها تعنى وتر القوس ، يمكن تخمين سبب هذا الاسم من (شكل ١٧) . إننا نقول إن ٠٨٧١٦و٠ هى جيب ٥° (تختصر فى العادة إلى جا ٥°) وأن جا ١٣° = ٢٢٤٩٥و ، جا ٣٠° = ٥و٠ .

وحيث إن ٣٠° تساوى ٥٢٣٦و زاوية نصف قطرية ، ١٣° = ٢٢٤٨٩و ، زاوية نصف قطرية ، ٥° تساوى ٠٨٧٢٧و زاوية نصف قطرية . (للحصول على هذه النتائج بدقة يجب علينا أن نستعمل دائرة نصف قطرها ١٠٠٠٠ قدم ثم نقيس حول المحيط) لذلك فإن جا ٥٢٣٦٠و=٥و٠ ، جا ٢٢٦٨٩و=٢٢٤٩٥و٠، جا ٠٨٧٢٧و٠ = ٠٨٧١٦و٠ .

لاحظ فى أثناء عملك أن هناك حقيقة تبرز للعيان وهى أن الزاوية بالتقدير الدائرى تساوى جيب نفس الزاوية . وأنه كلما صغرت الزاوية اقتربت من جيبها . فمثلا جا ٥٢٣٦٠و تساوى

٥و٠ . الفرق بين العددين ٥و٠ ، ٥٣٢٦و٠ يساوى ٠٣٢٦و٠ . ولكن جا ٨٧٢٧و٠ يساوى ٨٧١٦و٠ هنا الفرق بين العددين ٨٧٢٧و٠ ، ٨٧١٦و٠ يساوى ٠٠٠١١و٠ فقط (لقد اكتشفنا هذه الحقيقة بدون أى مجهود : فى العادة سوف تجد أنه بمجرد البدء بجمع الشواهد تصنع الاكتشافات نفسها) . توحى هذه النتيجة بأن هناك قانوناً ما بسيطاً يربط قيمة الزاوية بالتقدير الدائرى مع جيبها . سوف لا تتعجب فى الباب الرابع عشر عندما تجد متسلسلة تعطى جا س بدلالة س . ومن المهم أن تتذكر أن هذه المتسلسلة تكون صحيحة فقط عندما تكون الزاوية مقيسة بالزوايا نصف القطرية لا بالدرجات . (ابحث عن المتسلسلة فى الباب الرابع عشر واكتب هناك حاشية فى الهامش بهذا المعنى) .

يعرف جيب تمام الزاوية بطريقة مشابهة . عندما تبدأ طائرة من مطار وتطير ١٠٠٠٠ قدم فى خط مستقيم صانعة ٣٠° مع المستوى الأفقى فإننا نعرف أن مقدار إرتفاعها يساوى ١٠٠٠٠ جا ٣٠° قدم فوق الأرض .

هناك نقطة معينة على الأرض أسفل الطائرة مباشرة . ما بعد هذه النقطة عن المطار ؟ بالقياس وجد أنه ٨٦٦٠٫٣ قدماً . كل قدم آخر تطيره الطائرة (وهى لا تزال فى اتجاهها الأصلى) تتحرك هذه النقطة ٨٦٦٠٣و٠ قدم متباعدة عن المطار . وإذا طارت الطائرة

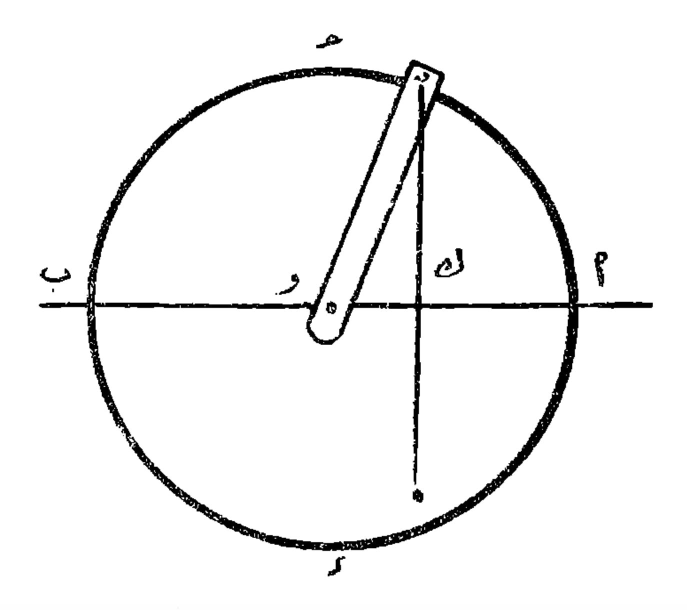
س قدم تتحرك النقطة ٨٦٦٠٣و س قدم . تسمى ٨٦٦٠٣و . بجيب تمام الزاوية ٣٠° ونكتبها باختصار :

٠,٨٦٦٠٣ = جتا ٣٠° = جتا ٥٢٣٦٠,٠ (العدد الأخير هو قيمة ٣٠° بالتقدير الدائرى) .

باختصار : إذا تحركنا فى خط مستقيم صانعين زاوية ن مع المستوى الأفقى فكل قدم نقطعه يزيد ارتفاعنا بعدد معين من الأقدام ، يسمى جا ن ، ويزيحنا جانباً بعدد معين من الأقدام يساوى جتا ن .

يمكننا بسهولة أن نصنع نموذجاً ليبين معنى جا ن ، جتا ن . ارسم دائرة نصف قطرها قدم واحدة . درج محيطها بمقياسين للدرجات والزوايا النصف قطرية . علقها على حائط أو سبورة . خذ شريطاً من الورق المقوى طوله يزيد قليلا عن قدم . ثبت أحد نهايتيه بمسمار صغير أو بدبوس رسم عند مركز الدائرة بحيث يكون الشريط حراً فى الدوران وعلى بعد قدم واحدة من المركز . أعمل ثقباً صغيراً فى الشريط وعلق فيه خيط مطمار . ص ٣٣١ شكل ١٧

لقد شرحنا الآن ماهية الجيوب وجيوب التمام . وبذلك يمكنك التحقق من صحة أية معلومات تعطى لك .



(شكل ١٧)

الجهاز الموضح فيه الخط ب و ا أفق . الخيط المعلق من الثقب الصغير ، ق ، يقطع ب و ا عند النقطة ك ، ق تقع أعلى الخيط ا و ب بارتفاع يساوى ق ك ، وعلى بعد و ك يمين و . وحيث إن و ق قدم واحدة تكون المسافة ق ك مقاسة لأقدام متساوية جيب الزاوية ا و ق وتكون المسافة و ك أيضاً لأقدام متساوية لجيب تمام ا و ق . ولعمل جدول تقريبي للجيوب والجيوب التمام يكون من المستحسن أن يكون طول و ق متراً ثم يقاس و ك ، ق ك إلى أقرب ملليمتر . سوف نحصل بالتأكيد على نتائج صحيحة إلى رقمين عشريين وربما لثلاثة .

وثمة نقطة واحدة تستحق الذكر . لقد قلنا إن جا ن تمثل ارتفاع ق فوق الخط ب و ا . ولكن لو صنعت ق زاوية تساوى ٢٧٠° أو ٤٫٧١ زاوية نصف قطرية حينئذ تقع أسفل ب و ا بقدم واحدة . ولكونها أسفل ب و ا بقدم واحدة يمكننا أن نقول إنها فوق ب و ا بمقدار — ١ قدم . وعلى ذلك فإن جا ٢٧٠° أو جا ٤٫٧١ يساوى — ١ . وبالمثل فإن جيوب الزوايا الواقعة بين ١٨٠° ، ٣٦٠° أو بين ٣٫١٤ ، ٦٫٢٨ زاوية نصف قطرية تكون بإشارة سالبة . أيضاً نعرف أن جتا ن هو بعد ق على يمين و . فإذا وقعت ق على يسار و كما يحدث للزوايا بين ٩٠° ، ٢٧٠° أو بين ١٫٥٧ ، ٤٫٧١ زاوية نصف قطرية فإن جيب التمام يكون بإشارة سالبة .

حقق بنفسك الجدول الآتى :

الزاوية (بالدرجات)	٠	٩٠	١٨٠	٢٧٠	٣٦٠
« (بالزوايا النصف القطرية)	٠	١٫٥٧	٣٫١٤	٤٫٧١	٦٫٢٨
الجيب	٠	+١	٠	—١	٠
جيب التمام	+١	٠	—١	٠	+١

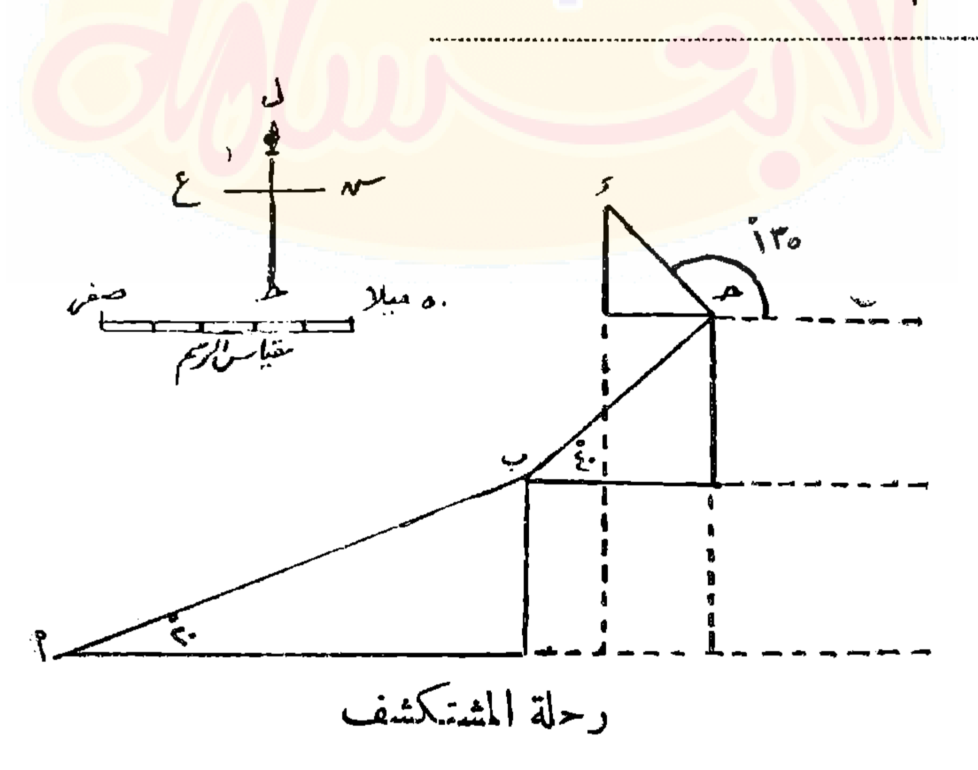
عندما يسجل مستكشف رحلته فإنه سوف يذكر فى أى اتجاه كان يتحرك ، وكم ميلا كان يقطعها . فإذا اتخذنا الشرق مناظر

إلى ٠° فإن الشمال يناظر ٩٠° وهكذا . وعلى الخريطة يعنى الشمال فى العادة إلى أعلى . ويعنى الشرق إلى اليمين وبذلك يكون من السهل أن نبين مواضع الطائرات والسكك الحديدية على الخرائط .

إذا قطع مستكشف ١٠٠ ميل فى اتجاه ٢٠° ثم ٥٠ ميلا فى اتجاه ٤٠° فما هو موضعه الجديد ؟ تكافئ ١٠٠ ميل فى اتجاه ٢٠° ، ١٠٠ جتا ٢٠° شرقاً ثم ١٠٠ جا ٢٠° شمالا . تكافئ ٥٠ ميلا فى اتجاه ٤٠° ، ٥٠ جتا ٤٠° شرقاً ثم ٥٠ جا ٤٠° شمالا . وباستعمال الجداول يمكننا حساب هذه الكميات . وبذلك يكون من السهل أن نحصل على المسافة الكلية التى قد قطعها شرقا والمسافة الكلية التى قطعها شمالا . ومن الملاحظ أن هذه الطريقة : (ا) يمكن تطبيقها على مسألة النفق شكل ١٥ ، (ب) تلقى بعض الضوء على الإشارات السالبة المذكورة سابقا . فاذا قطع المستكشف بعد القيام بالرحلة التى ذكرناها ٣٠ ميلا أخرى فى اتجاه ١٣٥° (أى شمال الغرب) فان هذا يزيد بعده شمالا (جا ١٣٥° كمية +) ولكن يقلل من بعده شرقا (جتا ١٣٥° كمية —) . فى الحقيقة إن استعمال الإشارات + ، — فى تعريف الجيب وجيب التمام يوفر علينا الكثير . إذ يكفى فقط للحصول على المسافة المقطوعة أن نضرب المسافة فى جيب الزاوية . تبين الإشارات + ، — التى تظهر بعد ذلك ما إذا كان هناك جمع أو طرح .

يستخدم فى حساب المثلثات نسب أخرى بجانب الجيب وجيب التمام — مثل الظل ، ظل التمام ، القاطع ، قاطع التمام . ومهما يكن فهذه مجرد اختصارات ، ولا تدخل أية فكرة أساسية جديدة : ويمكن دراسة الموضوع بدون استعمال هذه النسب بالمرة . لذلك سوف لا نتعرض لها هنا ولكن سوف نستمر فى دراسة خواص الجيوب وجيوب التمام .

بالطبع سوف نحاول أن نكتشف خواص الجيوب وجيوب التمام التى تفيدنا فى أغراضنا . ولدينا فى المخيلة مسألتان خاصتان .



رحلة المستكشف

ينتقل المستكشف من ا إلى ب ، من ب إلى حـ ، ثم من حـ إلى ى . طول ا ب ١٠٠ ميل ، طول ب حـ ٥٠ ميلا ، حـ ى ٣٠ ميلا . إنه يسجل كل جزء من رحلته ويحسب (بالطريقة التي شرحناها) فى كل جزء مقدار بعده شرقا ومقدار بعده شمالا . تظهر المسافات غرباً أو جنوباً باشارة سالبة ، حيث أن ١٠ أميال تجاه الغرب تعنى ١٠ أميال أقل تجاه الشرق .

	المسافة	الاتجاه	للشرق	للشمال
ا إلى ب	١٠٠ ميل	٢٠°	٩٤٫٠ ميل	٣٤٫٢ ميل
ب إلى حـ	٥٠ ميلا	٤٠°	٣٨٫٣ ميل	٣٢٫١ ميل
حـ إلى ى	٣٠ ميلا	١٣٥°	—٢١٫٢ ميل	٢١٫٢ ميل
كل الرحلة من ا إلى ى			١١١٫١ ميل	٨٧٫٥ ميل

المسألة الأولى تفرض أن فى حيازتنا جداول كافية للجيوب وجيوب التمام . وتعرف « بحل المثلثات » إنها مسألة تنبت طبيعياً من علم المساحة . إذ تعطى لنا بيانات معينة عن مثلث تكفى لرسمه ، ويطلب منا استنتاج الكميات المجهولة . فمثلا إذا علمنا فى

المثلث ا ب حـ الطول ا ب والزاويتين ا ب حـ ، ب ا حـ فانه يمكنا إيجاد الأطوال ا ب ، ب حـ .

كثيراً ما نجد هذه المسألة عند رسم الخرائط ، وفى تركيب أجهزة إيجاد المدى ، وتعيين موضع سفينة فى البحر مستعينين بقاعدتى فنارتين ، وفى تعيين مكان الغواصات ...... إلخ .

يحتاج المساحون والبحارة إلى جداول رياضية تبين الجيوب وجيوب التمام ومعلومات أخرى ، ولكن لابد لنا أن نحسب أولا هذه الجداول ، هذه هى مسألتنا الثانية . لقد اكتشفت خواص عدة للجيوب وجيوب التمام فى أثناء دراسة هذا الموضوع. إن الاهتمام بالجبر الذى أبداه علماء الرياضة فى القرن السادس عشر جاء من بعض الوجوه نتيجة لمعادلات كان يجب أن تحل قبل حساب أية جداول مثلثية [1] .

ثالثا ، من المرغوب فيه أن نعرف خواص الجيوب وجيوب التمام على أسس عامة . إنها تظهر فى مسائل كثيرة ويمكن فى المعادلة

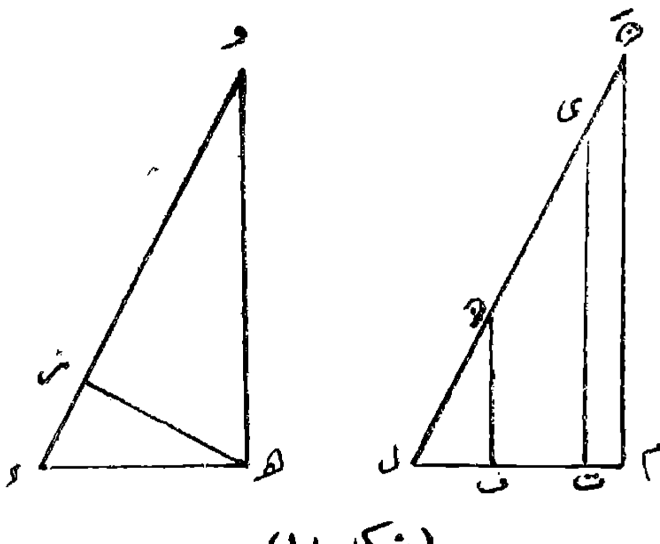
---

(١) انظر زيس ، تاريخ الرياضيات فى القرنين السادس عشر والسابع عشر ، فصل ٢ جزء ٤ . لست متأكداً إذا كان من الممكن الحصول بالإنجليزية على هذا المرجع .

اختصار العمل وجعله أبسط إذا عرفت هذه الخواص. وسوف نعطى مثالا على هذا فيما بعد.

نظرية فيثاغورس

فى شكل ١٧ جتا ن ، جا ن هى أطوال الأضلاع و ك ، ك ق حيث ن هى اختصار للزاوية ك و ق . يجد الطلبة عادة أنه من السهل أن يتفهموا هذا الشكل ولكنهم لا يتعرفون عليه دائماً عندما يبدو فى وضع لم يتعودوه أو بمقياس رسم مختلف. فمثلا فى شكل ١٨ يصنع ى وزاوية ن مع ى هـ . إنه من الواضح تماما أن المثلث ى هـ و يشابه المثلث و ك ق . ربما يكون غير الواضح أن هناك مثلثين آخرين فى الشكل بنفس الصورة . ولكنهما موجودان فعلا . إذا قصصت قطعة من الورق كبيرة لدرجة تغطى المثلثين ى هـ ز ، و هـ ز سوف تجد أنه من الممكن (بعد قلب الورقة) وضع هذين المثلثين فى الوضعين ل ف ن ، ل ت ى . ينطبق المثلث ل م نَ تماما على المثلث ى هـ و . إنه من الواضح أن المثلثات الثلاثة متشابهة ولا تختلف إلا فى المساحة .



(شكل ١٨)

ما هى أطوال الخطوط ء ز ، ز و ؟ يمكن وضع الخط ء ز الوضع ل ف وبذلك فهو يساوى جتا ن من المرات ل ن . ولكن ل ن يساوى ء هـ الذى يساوى جتا ن ونتيجة لذلك ء ز يجب أن يساوى جتا ن من المرات جتا ن أو (جتا ن)٢

وبنفس الطريقة تماماً يمكن إيضاح أن طول ز و يساوى (جا ن)٢ . لكن ء ز + ز و يساوى ء و الذى يساوى واحداً .

ينتج من ذلك أن :

(جتا ن)٢ + (جا ن)٢ = ١

وقد صادفنا فى الباب الثانى مثلث أضلاعه ٣ ، ٤ ، ٥ وزاوية قائمة بين الضلعين ٣ ، ٤ . إذا رسمنا هذا المثلث بمقياس رسم ١ : ٥ سوف تكون الأضلاع $\frac{٣}{٥}$ ، $\frac{٤}{٥}$ ، ١ وعلى ذلك يكون

ءهـ = $\frac{٣}{٥}$ ، هـ و = $\frac{٤}{٥}$ ، جتا ن = $\frac{٣}{٥}$ ، جا ن = $\frac{٤}{٥}$ وبذلك يصبح القانون السابق .

$$(\frac{٣}{٥})^{٢} + (\frac{٤}{٥})^{٢} = ١ \qquad \text{أو } ٣^{٢} + ٤^{٢} = ٥^{٢}$$

وبسبب هذه العلاقة بين ٣ ، ٤ ، ٥ يكون المثلث قائم الزاوية. مثلث آخر كذلك هو ٥ ، ١٢ ، ١٣ حيث $٥^{٢} + ١٢^{٢} = ١٣^{٢}$. إذا رسمنا زاوية جيب تمامها $\frac{٥}{١٣}$ فإن جيبها يكون $\frac{١٢}{١٣}$.

ويمكننا الآن الإجابة على السؤال الذى أثير فى الباب الثانى . إن البرهان السابق هو فى جوهرة نفس البرهان الذى أعطاة إقليدس . « تعرف النتيجة فى المعتاد بنظرية فيثاغورس ويمكن ذكرها كالآتى : إذا كانت ا ، ب ، حـ هى أطوال أضلاع المثلث القائم الزاوية فإن $ا^{٢} + ب^{٢} = حـ^{٢}$. هذه النتيجة فى جوهرها هى نفسها النتيجة التى قد حصلنا عليها لأنه إذا كانت ن هى الزاوية بين الضلعين $ا'$ ، $حـ'$ ، $ا' = حـ'$ جتا ن ، $ب' = حـ'$ جا ن (يحصل على هذه النتيجة بتكبير مقياس رسم مثلثنا المقياسى و ك ق حـ من المرات) . فإن $ا'^{٢} + ب'^{٢} = (حـ'$ جتا ن$)^{٢} + (حـ'$ جا ن$)^{٢}$. وهذه الكمية الأخيرة تساوى $حـ'^{٢}$ مضروبة فى (جتا ن$)^{٢}$ + (جا ن$)^{٢}$. ومن النتائج السابقة هذه تساوى $حـ'^{٢}$ مضروبة فى ١ : أى $حـ'^{٢}$. لذلك يمكن بالجبر البسيط أن نستنتج مما سبق أن $ا'^{٢} + ب'^{٢} = حـ'^{٢}$.

قانون جيب التمام

لقد قصرنا الكلام حتى الآن على المثلثات ذات الزوايا القائمة وسوف نبحث الآن فى الحالة العامة : نفرض أن لدينا المثلث ا ب حـ وأننا نعرف أطوال ا ب ، ا حـ ومقدار الزاوية ب حـ ا . فما هو طول ب حـ ؟ (ربما كان من المستحيل قياس ب حـ مباشرة بسبب وجود عوائق طبيعية كالجبال أو الأنهار أو المستنقعات ... إلخ) .

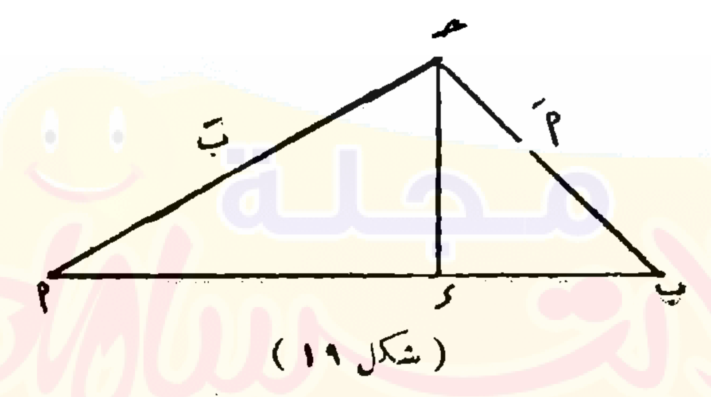
من المعتاد فى كتب حساب المثلثات أن يرمز إلى الأضلاع ب حـ ، حـ ا ، ا ب بالكميات ا′ ، ب′ ، حـ′ . وإلى زواياه الثلاثة بالكميات ا ، ب ، حـ وبذلك يكون ا′ هو الضلع المقابل للزاوية ا ... إلخ .

مسألتنا هى : إذا أعطى ب′ ، حـ′ ، ا أوجد ا′

هل يمكننا حل هذه المسألة ؟ هل الحقائق المعطاة كافية لرسم المثلث ا ب حـ ؟ إنها تكفى .. ويمكن حل المسألة بالرسم ، إنها مسألة من الممكن محاولتها .

هل يمكن بمساعدة جداول الجيوب وجيوب التمام أن نحلها بدون رسم ؟

ما هى جداول الجيوب وجيوب التمام ؟ إنها نتيجة تجارب أجريت على مثلثات قائمة الزوايا . وبذلك فإن الجيوب وجيوب التمام لا تخبرنا بشئ عن الشكل ما لم يقسم ذلك الشكل إلى مثلثات قائمة الزوايا . هل يمكن تقسيم ا ب حـ إلى مثلثات قائمة الزوايا ؟ فى الحقيقة إنه من السهل جداً ، كل ما يجب عمله هو أن نرسم حـ ى عمودياً على ا ب (شكل ١٩) فنحصل على مثلثين قائمى الزاوية ا ى حـ ، ب ى حـ ، ماذا نعرف عنهما ؟



(شكل ١٩)

الأمل قليل مع المثلث ب ى حـ فالمطلوب إيجاد ب حـ وكل ما نستطيع معرفته هو أن المثلث ب حـ ى قائم الزاوية .

وليس الحال كذلك بالنسبة للمثلث ا ى حـ إذ نعرف أن ا حـ = بَ ٢ وأن الزاوية ى ا حـ = ا . فى الحقيقة إننا نعرف كل شيء عن هذا المثلث إذ لدينا تماماً نفس المعلومات التى كانت لدينا فى مسألة السكة الحديدية ، عندما علمنا الزاوية التى تصنعها السكة الحديدية مع المستوى الأفقى (ا) والمسافة التى قطعها القطار (بَ) .

هذه المعلومات الجديدة تساعدنا فى حل المثلث ب ى حـ . إنها تخبرنا عن الطول حـى ، وترينا كيفية إيجاد ب ى . لأن اب = حـ′ ، ا ى = ب′ جتا ا ، ى ب هو ما يتبقى عند طرح ا ى من ا ب . وعلى ذلك فإن ى ب يساوى حـ′ − ب′ جتا ا .

نعرف الآن ما فيه الكفاية لتعيين المثلث ب ى حـ تماماً . إننا نعرف ى حـ ، ب ى وأن الزاوية حـى ب قائمة . يمكن الحصول على ب حـ بنظرية فيثاغورس لأن $\overline{\text{ب حـ}}^2 = \overline{\text{ى حـ}}^2 + \overline{\text{ى ب}}^2$. وبالتعويض عن ب حـ ، ى حـ ، ى ب بالقيم التى حصلنا عليها يكون لدينا أن :

$$\text{ا}'^2 = (\text{ب}'\ \text{جا ا})^2 + (\text{حـ}' - \text{ب}'\ \text{جتا ا})^2$$

يمكن وضع هذا القانون فى صورة أبسط . وقبل هذا دعنا نتأمل لفترة وجيزة فى الطريقة التى وصلنا بها إلى هذه النقطة .

أصعب الأمور فى المسائل الرياضية هو طريقة البداية . قبل عمل أى حسابات يجب على الإنسان دائماً أن يرسم خطة العمل . وإلا دار الإنسان حول نفسه مثل سفينة بدون دفة . وأثناء تجهيز هذه الخطة تناسى جميع الصعوبات التى ربما تأتى فى الحسابات الحقيقية . حاول ببساطة أن تكون الإطار الذى يربط ما تعرفه بالذى تريد أن تعرفه . ويكون من المفيد فى بعض الأوقات أن ترسم شكلا بالرصاص وتؤشر بالمداد على الأضلاع المعطاة

أو الزوايا المعروفة ثم تؤشر بالمداد على الأضلاع والزوايا التى يمكن حسابها من تلك التى سبق معرفتها . وبذلك تستمر مسجلا خطواتك .

سوف تكون خطتنا للمسألة الحالية كالآتى :

الخط ا حـ ، والزاوية ء ا حـ معلومان (حبر هذه)

ا ء ، ء حـ يمكن حسابهما (حبر هذه)

ا ب معلوم (ارسم خطاً بالمداد أسفل ا ب تماماً بحيث لا يمحو الخط ا ء المرسوم من قبل) .

وبذلك نحصل على ء ب بطرح ا ء من ا ب .

نحصل بفيثاغورس على ب حـ من ء حـ ، ء ب .

لا تنزعج إذا كنت قد نسيت القانون ا ء = ب جتا ا أو النتيجة الصحيحة لنظرية فيثاغورس . كل ما تحتاج أن تعرفه لعمل هذه الخطة هو أنه هناك قانون : وأن الشيء يمكن حسابه . فى الحياة العملية (التى هى أكثر أهمية من الامتحانات) يمكنك دائماً أن تحصل على القوانين من أى كتاب . ولكن سوف لا يرشدك أى كتاب لطريقة الحل : إنه يجب عليك أن تمرن نفسك .

والآن دعنا نرجع لقانون $ا'^٢$ الذى أوجدناه بالجبر البسيط يمكننا حسابه فنحصل على :

$$ا'^٢ = ب'^٢ جا^٢ ا + حـ'^٢ - ٢ ب' حـ' جتا ا + ب'^٢ جتا^٢ ا .$$

جا٢ ا هى الطريقة المعتادة التى يكتب بها ما قد كتبناه حتى الآن (جا ا)٢ ، جتا٢ ا تعنى نفس الشىء مثل (جتا ا)٢ . توفر الكتابة بهذه الطريقة أقواساً كثيرة .

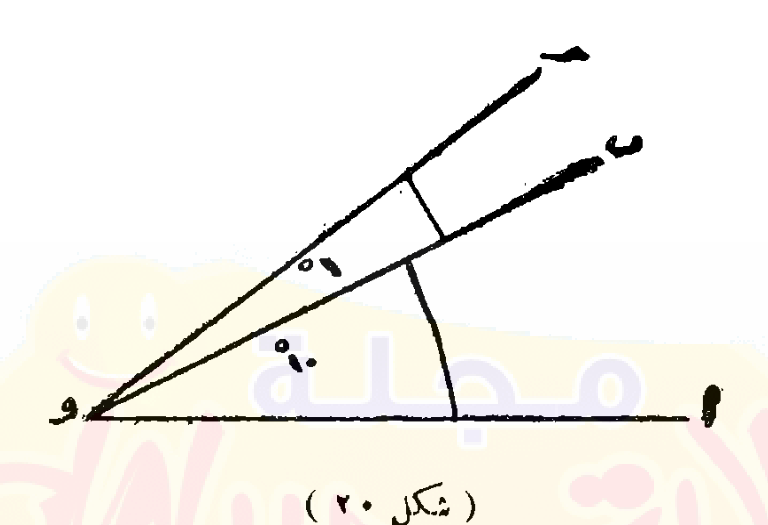
تلاحظ أن $ب'^٢$ تظهر مرتين فى هذه النتيجة . أولا لدينا $ب'^٢$ مضروبة فى جا٢ ا ، ثم $ب'^٢$ مضروبة فى جتا٢ ا . وعلى ذلك يكون مجموع $ب'^٢$ الكلى الذى يظهر هو جا٢ ا + جتا٢ ا ، وهو يساوى « ١ » . يتبع ذلك أن :

$$ا'^٢ = ب'^٢ + حـ'^٢ - ٢ ب' حـ' جتا ا .$$

وهو القانون العادى الذى يعطى فى الكتب الدراسية والمستعمل فى المسائل . هذا مثل للطريقة التى بها يمكن اختصار القوانين باستعمال خواص الجيوب وجيوب التمام . سبق أن وعدنا أننا سوف نعطى مثل هذا المثال .

قوانين الجمع

والآن دعنا نسوق بعض النتائج ذات الصلة الطبيعية بعمل الجداول وهى فى ذات الوقت ذات فائدة كمعلومات عامة .



(شكل ٢٠)

نفرض أننا شرعنا فى عمل جداول دقيقة للجيوب وجيوب التمام وأننا (بكثير من الجهد والمال) قد كوننا مثلثات كبيرة وحصلنا على نتائج دقيقة عن جا ١° ، جتا ١° ، جا ١٠° ، جتا ١٠° ، ومن الممكن أن نستمر فى عمل مثلثات جديدة ، وأن نوجد بالقياس جا ١١° ، جا ١٢° ... إلخ . إذا قمنا بذلك على نطاق واسع فإن العمل يصبح شاقاً للغاية .

ومن الطبيعى أن نعتبر ١٠° + ١° = ١١° فهل من الممكن استعمال هذه الحقيقة بطريقة ما ونحسب جا ١١° مستعينين

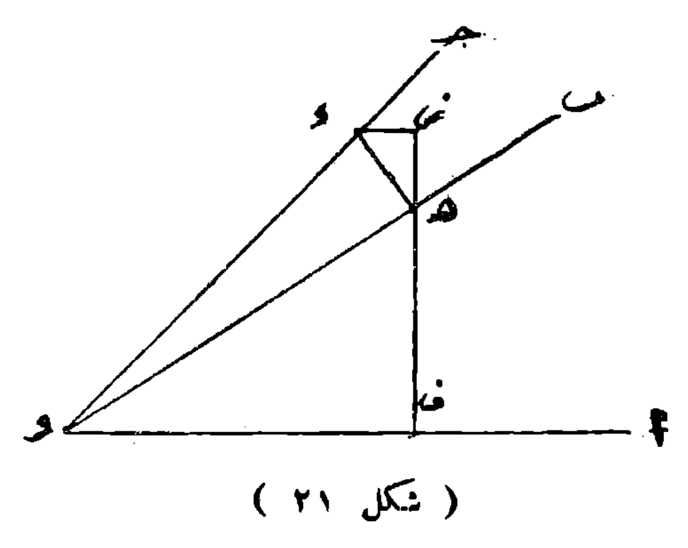
بمعلوماتنا عن ١٠°، ١° ؟ إذ تمكنا من عمل ذلك فإنه سوف يساعدنا كثيراً لأن نفس الطريقة سوف تعطى معلومات عن ١٢° .

والآن لنعد إلى مسألتنا : لقد وجدنا بالقياس
جا ١° = ٠,٠١٧٤٥، جتا ١° = ٠,٩٩٩٨٥، جا ١٠° = ٠,١٧٣٦٥
وجتا ١٠° = ٠,٩٨٤٨١ فما قيمة جا ١١°، جتا ١١° ؟

الصعوبة الأساسية فى هذه المسألة هى رسم الشكل الذى يبرز هذه الحقائق بوضوح . إنه من السهل تماماً أن نرسم زاوية مقدارها ١٠° وفوقها زاوية أخرى = ١° كما فى شكل ٢٠ . هذه توضح تماماً العلاقة أن ١١° = ١٠° + ١° لكنها لا تخبرنا كثيراً عن الزاويتين ١٠°، ١° .

علينا أن نعتبر أن الزوايا المبينة فى الشكل هى فى الحقيقة ١٠°، ١° . ليس هناك شىء يبين أنها كذلك بالأخص، وليس هناك شيئاً يربطها مع جا ١°، جا ١٠° .. إلخ (فى الحقيقة لتوضيح الشكل يجب أن نرسم الزوايا أكبر مما هى عليه حقيقة) .

إننا نرغب فى أن نظهر الحقيقة أن ب و حـ هى الزاوية ١°، التى جيبها ٠,٠١٧٤٥ وجيب تمامها ٠,٩٩٩٨٥ . فلكى نفعل هذا



(شكل ٢١)

علينا أن نكون مثلثاً قائم الزاوية . خذ ى على بعد ١ من و وارسم ى هـ عمودياً على و ب (شكل ٢١) وبذلك يكون و هـ = جتا ١° = ٠,٩٩٩٨٥ ، ى هـ = جتا ١° = ٠,٠١٧٤٥

كيف يمكن إدخال جا ١١° فى الموضوع ؟ طول و ى = ١ ويصنع زاوية ١١° مع و ا حينئذ يكون ارتفاع ى فوق و ا يساوى جا ١١° . إنه هذا الارتفاع الذى نريد إيجاده .

ولكن هذا من السهل عمله : إنها ذات المسألة التى عرضت لنا عندما سار المستكشف ١٠٠ ميلا فى اتجاه معين ثم ٥٠ ميلا فى اتجاه آخر . يمكننا أن ننتقل من و إلى ى بالذهاب أولا من و إلى هـ ثم من هـ إلى ى . إننا نعرف طول واتجاه كل من و هـ ، هـ ى .

ارسم خطاً رأسياً ف هـ ز ماراً بالنقطة هـ ، النقطة ف نقطة

على و ا ، ز نقطة على نفس الارتفاع مثل ى ، بحيث ف ز يساوى ارتفاع ى فوق و ا ، أى ف ز = جا ١١° .

لكن ف ز = ف هـ + هـ ز ، فإذا تمكنا من حساب ف هـ ، هـ ز يمكن حل المسألة . ومن السهل حساب ف هـ ، و هـ = ٠,٩٩٩٨٥ ويصنع زاوية ١٠° مع و ا وعلى ذلك فالارتفاع ف هـ = ٠,٩٩٩٨٥ ، جا ١٠° = ٠,٩٩٩٨٥ × ٠,١٧٣٦٥
يمكن الحصول على هـ ز من المثلث هـ ز ى القائم عند ز .
ويمكن الحصول على ز هـ ى بدوران المثلث هـ و ف زاوية قائمة ثم جعله ينكمش بمقياس أصغر الزاوية ى هـ ز هى فى الحقيقة نفس الزاوية هـ و ف ، أى ١٠° . ونتيجة لذلك ، هـ ز = هـ ى جتا ١٠° = ٠,٠١٧٤٥ × ٠,٩٨٤٨١ بجمع هاتين النتيجتين نحصل على طول ف ز ، أى جا ١١° .

ويمكن كتابة هذه النتيجة فى الصورة :

جا ١١° = جتا ١° جا ١٠° + جا ١° جتا ١٠°.

ليس هناك شيئا خاصا بالعددين ١ ، ١٠ فنفس الطريقة يمكن تطبيقها على أى عددين س ، ص بالدرجات وسوف تجد أن :

جا (س + ص) = جتا س جا ص + جا س جتا ص

أيضا سوف لا تجد صعوبة فى حساب جتا ١١° وهى بعد ى على يمين و ، ولا فى حساب القانون المناظر إلى جتا (س+ص) مقدرا س ، ص بالدرجات .

قوانين أخرى

ويجب النظر إلى القوانين التى بحثنا فيها على أنها نماذج لغيرها من القوانين . وهناك غيرها من قوانين حساب المثلثات يمكن الحصول عليها بطريقة شبيهة إلى حد كبير بالطرق التي شرحناها . وتزدحم الكتب بالنتائج ، ولكن يكفى فى معظم الأحيان أن نلم بعدد قليل من القوانين وبعدد قليل من الطرق المباشرة للحل .

وإذا كنت ممن يدرسون حساب المثلثات لغرض ما محدد ، مثل المساحة أو الملاحة فإنك تحسن فعلا إذا حصلت على كتاب فى الموضوع لترى أى القوانين يمكن استعمالها والموضوعات التى تستخدم فيها .

تفاضل الجيوب وجيوب التمام

كثيراً ما يحدث أن تجد الجيوب وجيوب التمام فى مسائل على حركة الآلات ، ذبذبات بعض الأجسام ، أو التغيرات فى التيارات

الكهربية . كل هذه تدعو للتفاضل لكونها مسائل على تغير السرعة . لذلك كان جديراً أن ندرس السؤال الآتى : ما هو المعدل الذى تتغير به جا ن ، وجتا ن عندما تتغير ن ؟

سوف ندرس هذه المسألة بواسطة النموذج المبين فى شكل ١٧.

نفرض أن النقطة ق تبدأ عند ا وتدور حول الدائرة بسرعة ثابتة ١ قدم فى الثانية . فبعد ن ثانية تكون قد قطعت ن قدم وبذلك تساوى الزاوية ا و ق ـ ن زاوية نصف قطرية . (وتكون النتائج التى سوف نحصل عليها صحيحة فقط عندما تكون الزاوية مقدرة بالتقدير الدائرى) .

إننا نعرف أن جا ن تقيس ارتفاع ق فوق ا و ب بعد ن ثانية . فإذا كان هذا الارتفاع يساوى ص قدم فإن : ص = جا ن . تقيس جتا ن بعد ق على يمين و بعد ن ثانية . فإذا كان هذا البعد يساوى س قدم فإن س = جتا ن . بالطبع إذا وقعت ق أسفل ا و ب ، تكون ص عدداً سالبا : سوف تكون س سالبة إذا وقعت ق على يسار و . ففى الشكل س تساوى طول و ك بالأقدام ، ص تساوى طول ق ك بالأقدام .

لاحظ أن الرموز ص ، س ليس لها علاقة بالمرة مع أية

رموز أخرى تكون قد استعملت فى أبواب سابقة . فمثلا فى الباب العاشر كانت س هى عدد الثوانى التى مرت وفى البابين الحادى عشر والثانى عشر ناقشنا المقدار $\frac{ءص}{ءس}$. وفى هذا الجزء ن هى الرمز المستعمل « لعدد الثوانى » و س ، ص لهما فقط المعانى المعطاة فى الفقرة الأخيرة .

إن السرعة التى تتغير بها س ، ص هى $\frac{ءس}{ءن}$ ، $\frac{ءص}{ءن}$ وهذه يمكن كتابتها فى الصورة س′ ، ص′ . لذلك فإن س′ تعنى السرعة التى يتغير بها الطول وك . ص′ السرعة التى يتغير بها الطول ق ك (إذا وقعت ق أسفل ا و ب سوف تضطر إلى مد الخط الرأسى إلى أعلى حتى يقطع ا و ب . وهكذا تعين ك) .

لقد شرحنا من قبل بعناية معنى السرعة وكيفية قياسها . إن معانى س′ ، ص′ يجب أن تكون واضحة .

هناك أربع نقط على الدائرة — حيث يكون من السهل ملاحظة ما يحدث . والنقط هى : أعلى نقطة حـ ، أسفل نقطة ء مع النقطتين ا ، ب . مسار ق عند حـ ، ء أفقيا وعند ا ، ب رأسيا .

وحيث إن المسار أفقى عند حـ ، ء فلا يمكن أن يزيد أو يقل

إرتفاع ق عندما تمر بهذه النقط . وحيث إن ص َ تقيس السرعة التى يتغير بها إرتفاع ق ، لذلك فإن ص َ = ٠ .

عندما تمر ق بالنقطتين حـ أو ى ، ربما يكون من السهل أن ترى هذه النتيجة لو لاحظت أن ق تتحرك إلى أعلى قبل أن تصل إلى النقطة حـ تماماً (لذلك تكون ص َ +) وإلى أسفل بعد ما تمر بالنقطة حـ تماماً (لذلك تكون ص َ —) . عند النقطة حـ تكون ص َ تماماً عند اللحظة التى تتغير فيها من + إلى — لذلك يجب أن تساوى صفراً (قارن ما كتب فى الباب الحادى عشر عن معنى ص َ)

تبين نفس الطريقة أن س َ = ٠ عندما تكون ق عند ا أو ب .

ما قيمة س َ عندما تكون فى عند حـ ؟ عند حـ يكون المنحنى أفقياً وتكون النقطة ق لحظيا لا صاعدة ولا هابطة ، ولكن نقطة متحركة فى اتجاه اليسار بسرعة قدم واحدة فى الثانية . بمعنى آخر عند هذه اللحظة تكون س متناقصة بمعدل ١ قدم /ثانية . أى أن س َ = — ١

عند النقطة ى تكون ق متحركة تجاه اليمين بسرعة قدم واحدة/ ثانيه ولذلك س َ = ١ . بنفس الطريقة يمكننا إيجاد ص َ عند النقط ا ، ب . عند ا تتحرك ق لأعلى ، وتكون ص َ متزايدة

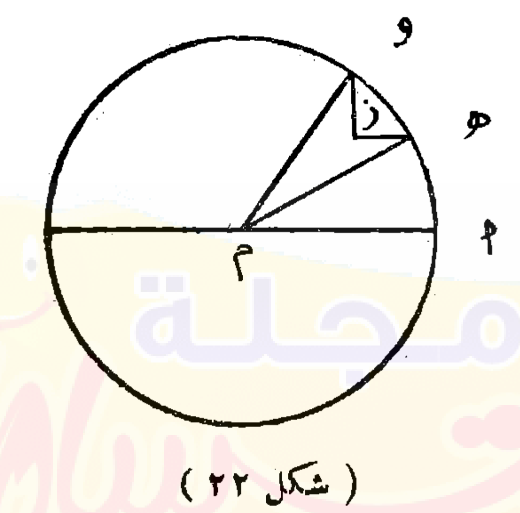
أى ص′ = ١ . عند ب تكون ق متحركة إلى أسفل أى ص = — ١ .

يمكن الوصول للنقط ا ، ح ، ب ، ى بعد ٠ ، ١,٥٧ ، ٣,١٤ ، ٤,٧١ ثانية (تقريباً) . يمكننا أن نسكمل الجدول الذى سبق ذكره فى هذا الفصل هكذا :

الموضع	ا	ح	ب	ى
ن = الزمن بالثوانى =				
الزاوية بالتقدير الدائرى	٠	١,٥٧	٣,١٤	٤,٧١
س = جتا ن = وك	+ ١	٠	— ١	٠
ص = جا ن = ق ك		+ ١		— ١
سَ		— ١		+ ١
صَ	+ ١		— ١	٠

هذا الجدول يوحى بشىء ما إذ أن صف صَ هو نفسه صف س : وصف سَ هو نفسه صف ص مع اختلاف فى الإشارة لذلك فإن صَ = س ، سَ = — ص . إننا لم نبرهن هذه النتائج ولا هى تبدو حتى محتملة . لقد استشهدنا فقط بأربع نقط على الدائرة . إن القانون صَ = س٣ يتفق مع الجدول تماماً . ولكن لأنه تخمين جرىء فيجدر ، على الأقل أن تفحص النتائج .

ونترك للقارئ أن يأخذ نقطاً أخرى واقعة بين ا ، ح ويمكن استعمال جداول الجيوب وجيوب التمام . لا تنسى أن تقيس الزاوية ن بالتقدير الدائرى (درجة واحدة = ٠٫٠١٧٤٥ زاوية نصف قطرية) . بهذه الطريقة يمكنك إقناع نفسك أن التخمين كان صحيحاً .



(شكل ٢٢)

ومن الممكن أيضاً أن نوضح هذه النتيجة بيانياً . فى شكل ٢٢ تبين هـ موضع ق بعد ن ثانية . أى أنه إذا أخذنا شريطاً طوله ن قدم فإنه ينطبق على محيط الدائرة من ا إلى هـ . بعد ذلك بقليل تكون ق قد تحركت إلى نقطة و ، أبعد قليلا على المحيط . ويكون طول الجزء الزائد هـ و من الشريط △ ن قدم . فإذا كانت و قريبة جداً من هـ يكون الشريط هـ و تقريبا مستقيما ، وسوف لا يكون هناك خطأ كبير إذا اعتبرنا △ ن مساوية لطول الخط المستقيم هـ و .

الخط هـ ز أفق ، الخط ز و رأسى . ولذلك ز و يمثل الزيادة في ارتفاع ق عندما تتحرك من هـ إلى و ، أى ز و = △ص . سوف تجد أن الزاوية ز و هـ تقريباً مساوية للزاوية ا م هـ التى هى ن زاوية نصف قطرية . ونتيجة لذلك زو = وهـ جتا ن تقريباً . وعندما تزداد △ ن فى الصغر نجد أن $\frac{ءص}{ءن}$ = جتاهـ .

وبنفس الطريقة يساوى ز هـ النقصان فى س أى △ س ،

زهـ=هـ و جا ن تقريبا وهذا يؤدى للنتيجة $\frac{ءس}{ءن}$ = ــ جان .

وحيث إن س تقوم مقام جتا ن ، ص مقام جا ن ، يمكننا كتابة هذه هذه النتائج فى الصورة : ــ

$$\frac{ء(جان)}{ء ن} = جتا ن \qquad ، \qquad \frac{ء(جتان)}{ء ن} = - جا ن$$

هذا أقصر من قولنا :

« إذا كانت ص = جان فإن $\frac{ءص}{ءن}$ = جتا ن .. إلخ

وهى تعنى نفس الشىء . سوف نذكر النتيجة فى هذه الصورة فى الباب الرابع عشر عندما توجد متسلسلات جتا ن جا ن أو على أية حال للجيب وجيب التمام . ولا يمكن أن أعد باستعمال الحرف ن مع الجيب أو جيب التمام .

رأينا فى الباب العاشر أنه يمكن إيجاد القوة المؤثرة على جسم متحرك إذا علمنا ك س″ ، ك ص″ . كثيراً ما يحدث فى الآلات أن تتحرك كتلة ثقيلة حول دائرة مثلا كأى جزء من عجلة دوارة أو قطعة من المعدن المتصلة بعجلة آلة بخارية (ولو أن هذه أيضاً تتحرك فى خط مستقيم) تقوم الطائرة وهى تؤدى حركة انقلابية، أو العربة وهى تدور فى منحنى بنفس الحركة .

لذلك يمكن اعتبار أن هناك فى شكل ١٧ ثقلا مربوطاً عند النقطة ق ونبحث ما هى القوى اللازمة لتجعله يتحرك فى الاتجاه المطلوب . حيث إن ص = جا ن ، ص′ = جتا ن ، لذلك تكون ص″ (وهى معدل تغير ص′) = – جا ن . بنفس الطريقة نجد أن س″ = جتا ن . ليس هناك أية صعوبة فى إيجاد س″، ص″ ويمكن بسهولة لأى إنسان له بعض الخبرة فى المسائل الأولية على الإستاتيكا والديناميكا أن يحصل على القوة الكلية المؤثرة على النقطة عند ق .

تمارين

١ – اقطع قرصاً دائرياً من الورق المقوى وضع حول الحافة

تدريجاً لقياس الزوايا بالتقدير الدائرى بالطريقة المشروحة فى هذا الباب على نفس القرص ضع تدريجاً لقياس الزوايا بالدرجات .

ارسم على قطعة من الورق زاوية مقدارها $\frac{3}{8}$ زاوية نصف قطرية ، زاوية واحدة نصف قطرية ، $2\frac{1}{2}$ زاوية نصف قطرية ، ٥ زاوية نصف قطرية ، ١٠ زاوية نصف قطرية .

كم تكون ١٠° ، ٥٠° ، ٩٥° ، ١٨٤° بالزوايا نصف القطرية ؟

٢ ــ اصنع نموذجا حقيقيا لشكل ١٧ ثم اصنع من هذا جدولا للجيوب وجيوب تمام الزوايا ٥° ، ١٠° ، ١٥° ، ... إلخ . (حتى الزاوية ٩٠°) لرقمين عشريين . تحقق من نتائجك عن الجيوب من جداول مطبوعة .

٣ ــ اكتب من نتائجك فى سؤال ٢ قيمة جا ١٠° ، جا ٢٠° .. إلخ حتى جا ٨٠° . أكتب جيوب التمام بالترتيب العكسى : جتا ٨٠ ، جتا ٧٠ ، .... جتا ١٠ . ماذا تلاحظه على القائمتين ؟ ماذا يمكنك أن تقوله عن جا س بالدرجات ، جتا (٩٠ ــ س) بالدرجات ؟ هل يمكنك أن ترى أى سبب لنتيجتك ؟

٤ ــ من نموذجك (سؤال ٢) أوجد لرقمين عشرين جا ١٠٠° ، جا ١١٠° ، ... ، جا ١٧٠°

قارن بين هذا وجا ١٠° ، ٠٠٠ ، جا ٨٠° ماذا تلاحظه على المجموعتين ؟

ما هو القانون الذى يربط جا (١٨٠ — س) بالدرجات مع جا س بالدرجات ؟

٥ — اوجد من نموذجك جتا ١٠٠° ، جتا ١١٠° ، ٠٠٠ ، جتا ١٧٠° . (لجميع هذه الحالات تقع ك على يسار و ولذلك تكون إشارة جيوب التمام سالبة . قارن هذا مع جتا ١٠° ، جتا ٢٠° ...... جتا ٨٠° . ما هو القانون الذى يربط :

جتا (١٨٠ — س) بالدرجات مع جتا س بالدرجات ؟

قارن أيضاً المجموعة التى أوجدتها جتا ١٠٠° ، ...... جتا ١٧٠° مع جا ١٠° ، ...... جا ٨٠° . هل يوجد قانون يربط :

جتا (٩٠ + س) بالدرجات مع جا س بالدرجات . ؟ إذا كان هناك قانون فما هو ؟

٦ — تعطى الجداول المطبوعة جيوب الزوايا بين ٠° ، ٩٠° . لإيجاد جيوب الزوايا بين ٩٠° ، ١٨٠° ، ولإيجاد جيوب التمام علينا استعمال نتائج سؤال ٣ ، ٤ ، ٥ . فمثلا تعطينا الجداول أن جا ٣٧° = ٠٫٦٠١٨ ما هى قيم جتا ٥٣° ، جتا ١٤٣° ، جتا ١٢٧° ؟

٧ — يطير طيار ٢٠٠ ميلا فى اتجاه ٣٧° شمال الشرق . كم

ميلا يتحركها شرقاً وكم ميلا يتحركها شمالا ؟ (ملحوظة ، من الضرورى فى حالة الطيران البعيد المدى أن تأخذ فى الاعتبار حقيقة أن الأرض كروية . جميع الأسئلة فى هذا الباب تشير إلى رحلات قصيرة ويمكن أن نعتبر أن الأرض مستوية) .

٨ — اوجد كم ميلا شرق ا وكم ميلا شمالها تكون النقطة حـ إذا علم من مذكرات مستكشف أن المسافة من :

ا إلى ب = ٣٠ ميلا فى إتجاه ٤٠° شمال الشرق .

ب إلى حـ = ١٠ أميال فى إتجاه الغرب .

٩ — اوجد نفس الشيء للرحلة :

من ا إلى ب ٤٠ ميلا فى إتجاه ٧٠° .

من ب إلى حـ ٢٠ ميلا فى اتجاه ١١٠° .

١٠ — وأيضاً :

من ا إلى ب ١٠٠ ميلا فى اتجاه ٣١٥° (أى جنوب الشرق)

من ب إلى حـ ١٥٠ ميلا فى إتجاه ٨٠° .

١١ — على طائرة أن تسافر إلى مدينة على بعد ١٠٠ ميلا فإذا طارت خطأ فى اتجاه يصنع ٢° مع الطريق الصحيح . فكم يكون بعدها عن المدينة بعد أن تكون قد قطعت ١٠٠ ميلا ؟

١٢ — تقع ب على بعد ٦٥ ميلا من ا فى اتجاه ٣٦° ، حـ على

بعد ٧٥ ميلا من ا فى اتجاه ٩٥° ، ى على بعد ١٠٥ ميلا من ا فى اتجاه ١٣٩° .

ما هو بعد ب عن حـ ، حـ عن ى ، ى عن ب .

هذه يمكن حلها بواسطة القانون :

$$ا'^{٢} = ب'^{٢} + حـ'^{٢} - ٢ ب' حـ' جتا ا$$

وبعملية حسابية مماثلة نحصل على المسافتين الأخريين . تذكر أن جتا ١٠٣° التى تظهر فى قانون المسافة من ى إلى ب لها إشارة سالبة . حقق عملياتك الحسابية بالرسم .

الباب الرابع عشر

الأساس

«إن الدراسات الحديثة فى علاقة العلم بالمجتمع قد أكدت أن العلوم التجريبية إنما نشأت عندما التفت النظريون إلى الحرف والفن ، ومن الناحية الاخرى نجد أن أهل الحرف إلى يومنا هذا قد فشلوا فى أن يتلقنوا درسا من النظريين» .

(من كتاب العلم منذ عام ١٥٠٠ لمؤلفه بليدج)

كثيراً ما يكون لطلبة الرياضيات الخبرة فى تفهم براهين بعض النتائج ، ولكن لا يكون لهم القدرة على التعرف على ماهيتها . فيبقى الموضوع وكأنه كمية معزولة من المعرفة . وحيث إن الذاكرة تعتمد على الارتباطات فإنه يكون من الصعب تذكر هذه النتائج . إننا نتذكر جيداً الأشياء المألوفة لنا فى الحياة لأن هناك أشياء أخرى تذكرنا بها باستمرار ، وبذلك تجدد صورها فى مخيلتنا . يشعر الطلبة بقلق عندما يطلب منهم أن يتذكروا أشياء غير مرتبطة بالحياة : لا يمكن للعقل أن يفكر بكفاءة ما لم يهيء له الجو المناسب لذلك .

تبدو هذه الظاهرة بوضوح فى مبادىء الجبر . فكثير من الكتب المدرسية ، تشرح بدقة تامة مثلا ، معنى متوالية هندسية ثم يأتى المدرس (الذى ربما لايكون هذا الموضوع من أختصاصه فيضطر ان يدرسه بدون تفهمه) ويسير على نمط هذه الكتب ويدرس المتواليات العددية والهندسية فقط لأنها ضمن المقرر .

لقد كان لدينا قبلا (بدون أن نلاحظ ذلك) مثالين على المتواليات العددية ، يقطع الرجل الذى يهبط من أعلى منزل قدما واحدة فى الربع الثانية الأول ، ٣ أقدام فى الربع التالى ، ٥ أقدام فى ربع الثانية الثالث ، ٧ أقدام فى الربع الرابع وهكذا . فتكون المسافة التى قطعت فى ثانية واحدة هى ١ + ٣ + ٥ + ٧ قدما . يزيد كل عدد فى مجموعة الأعداد ١ ، ٣ ، ٥ ، ٨ إلخ بمقدار ٢ عن سابقة . تسمى مجموعة الأعداد التى يزيد فيها (أو يقل) كل عدد عن سابقة بكمية ثابتة بمتوالية عددية .

كان المثال الثانى فى الباب الثانى عشر عندما جمعنا الأعداد ٠،٠١ ، ٠،٠٢ ... إلخ حتى ٠،٠٩ تكون أيضاً هذه الأعداد متوالية عددية ، وفى نفس الباب ، بعد ذلك رأينا أنه يمكن الحصول على قيمة أكثر دقة للتكامل $\int_{0}^{1}$ س ء س لو كنا قد قسمنا الثانية الأولى إلى ١٠٠ جزءا بدلا من عشرة أجزاء . وكان يجب حينئذ أن نحسب مجموع ١٠٠ عدد ابتداء من ٠،٠٠١ ، ٠،٠٠٢ ، ٠٠٠٠٠

إلى ٠٫٠٠٩٨ ، ٠٫٠٠٩٩ . هل يمكن اختصار العمل بحيث لا نكون مضطرين للقيام فعلا بعملية الجمع هذه ؟ نعم هذا ممكن . مجموع العدد الأول ٠ ، العدد الأخير ، ٠٫٠٠٩٩ هو ٠٫٠٠٩٩ . مجموع العدد الثانى ٠٫٠٠٠١ والعدد ما قبل الأخير ٠٫٠٠٩٨ هو أيضاً نفس الكمية . بالاستمرار فى هذه الطريقة يمكننا أن نقسم الأعداد إلى أزواج ، مجموع كل زوج ٠٫٠٠٩٩ بذلك يكون لدينا ٥٠ زوجا مجموعها ٥٠×٠٫٠٠٩٩ أى ٠٫٤٩٥ لقد ذكرنا هذه النتيجة بدون برهان فى الباب الثانى عشر .

المتواليات الهندسية

تتكون المتوالية الهندسية من مجموعة من الأعداد نحصل على أى عدد فيها بضرب العدد الذى قبله فى كمية ما ثابتة : ١ ، ٢ ، ٤ ، ٨ ، ١٦ ، ......

أو ٣ ، ١$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٣}{٨}$ ....

تأتى مثل هذه المتسلسلات بطرق عديدة .

على سبيل المثال هاك السؤال المشهور :

متى يمر عقرب الدقائق فوق عقرب الساعات ما بين الساعة ٣

والساعة ٤ ؟ إنه من الطبيعى تماماً أن نبدأ التفكير بالطريقة الآتية . عند الساعة ٣ يكون عقرب الدقائق متأخراً ١٥ دقيقة عن عقرب الساعات . يتحرك عقرب الساعات ببطء بحيث يمكن لعقرب الدقائق أن يلحق به تقريباً ، فى ظرف ١٥ دقيقة . يتحرك عقرب الساعات مسافة خمس دقائق فى كل ساعة — أى أن سرعته $\frac{1}{12}$ من سرعة عقرب الدقائق : وبذلك عند الساعة ٣,١٥ يكون عقرب الساعات قد تحرك $\frac{15}{12}$ دقيقة . وهذا هو المقدار الذى لايزال على عقرب الدقائق أن يلحق به . ويصل عقرب الدقائق هذا الموضوع بعد $\frac{15}{12}$ دقيقة أخرى . لكن أثناء ذلك يكون قد تحرك عقرب الساعات مسافة أخرى $\frac{15}{12^2}$ من الدقيقة . بهذه الطريقة نستمر فى تصحيح حدسنا الأول ، ١٥ دقيقة ، بأن نضيف إليه على الترتيب $\frac{15}{12}$ ثم $\frac{15}{12^2}$ وهكذا ، كل تصحيح يساوى $\frac{1}{12}$ من قيمة التصحيح الذى قبله . بهذه الطريقة نحصل على المتوالية الهندسية :

$$15 + \frac{15}{12} + \frac{15}{12^2} + \frac{15}{12^3} + \cdots\cdots$$ إلخ

يمكننا أن نحصل على قيمة المتسلسلة لأى درجة من الدقة باتخاذ عدد كاف من حدودها . فمثلا تعطى الحدود الأربعة

الأولى فى المتسلسلة جواباً يختلف عن الجواب الصحيح بأقل من ٠,٠٠١ .

إنه من الممكن أن نستنتج مجموع هذه المتسلسلة : يتحرك عقرب الساعات ٥ دقائق بينما يتحرك عقرب الدقائق ٦٠ دقيقة ، أى أن عقرب الدقائق يسبق عقرب الساعات بمعدل ٥٥ دقيقة كل ساعة أو ٥٥/٦٠ من الدقيقة فى كل دقيقة ، ٥٥/٦٠ هى نفسها ١١/١٢ . ونتيجة لذلك فلكى يلحق عقرب الدقائق بعقرب الساعات ، يحتاج إلى ١٥ على ١١/١٢ دقيقة أى ١٦ ٤/١١ دقيقة وهو مجموع المتسلسلة .

مسألة أخرى : ينتج الطن من بذور البطاطس محصولا مقداره ٣ أطنان ، وهذا يمكن إما أن يستهلك أو يستعمل مرة أخرى كبذور . ما هى الكمية التى يجب أن يشتريها مزارع إذا رغبت عائلته فى استهلاك طنا من البطاطس كل سنة على طول السنين ؟

أول كل شىء ، عليه أن يشترى طنا ليغطى حاجته لهذه السنة . للحصول على طن للسنة التالية يكفى أن يزرع الآن ١/٣ طن . لتغطية حاجات السنة التى بعد التالية يكفى ، ١/٩ طن : لأن ذلك ينتج ١/٣ طن للسنة التالية ، وهذا عند زرعه مرة أخرى ينتج طناً واحداً للسنة التى بعدها وهكذا . لتغطية حاجات عائلته على مدى السنين يجب على المزارع أن يشترى ١ + ١/٣ + ١/٢٧ + ١/٨١ + ٠٠٠٠٠ إلخ طنا .

ما هو مجموع هذه المتسلسلة ؟ دعنا نسمى المجموع الذى تئول إليه س .

وبذلك تكون س = ١ + ⅓ + ١/٩ + ١/٢٧ + ...

، ٣س = ٣ + ١ + ⅓ + ١/٩ + ...

نلاحظ أن متسلسلة ٣ س هى نفسها متسلسلة س بإضافة ٣ عند البداية ، لذلك ٣ س = ٣ + س . ينتج أن :

٢ س = ٣ أى س = ٣/٢ .

يمكننا أن نرى بسهولة أن هذا هو الجواب الصحيح . فإذا اشترى المزارع ١½ طن فإنه يحتاج إلى طن واحد ليأكله فى هذه السنة وإلى ½ طن ليزرعه . سوف يكون المحصول ثلاثة أضعاف ما قد زرع ، أى سوف يكون ١½ طن ، مرة أخرى يكون لديه طناً ليأكله و ½ طن ليزرعه . بهذه الطريقة يمكنه هو وأحفاده أن يستمروا إلى ما شاء الله .

يأتى نفس النوع من المتسلسلات مرتبطاً بالدفع السنوية ، الربح المركب ، الخصم ، الأسهم والسندات .. إلخ إن الربح المركب هو أحد الأسباب التاريخية الأساسية التى جعلت المتواليات الهندسية أول مايدرس . إنها بدون شك موضوع مهم

لمن يريد الثراء بالربا : وما عدا ذلك يبدو الربح المركب موضوعاً ثقيلا لمعظم الناس وبالذات للأطفال فى المدارس .

إن دراسة مقاومة الهواء لتطبيق آخر على المتسلسلات الهندسية . فالجسم المتحرك فى الهواء يشبه رجلا مندفعاً فى وسط حشد . كلما أسرع زاد عدد من يصطدم بهم : بمعنى آخر إن المقاومة التى تعوق تقدمه تتناسب مع سرعته . ينطبق نفس الشيء على جسم متحرك فى الهواء (بفرض أن سرعته ليست كبيرة جدا) : كلما يزيد سرعته تزيد كمية الهواء التى يدفعها عن طريقه فى كل ثانية ، ونتيجة لذلك يفقد كسر معين من سرعته فى كل ثانية . فإذا قطع الجسم قدما واحدة فى الثانية الأولى فإنه يقطع $\frac{1}{3}$ قدم فى الثانية التالية ، $\frac{1}{9}$ قدم فى الثانية الثالثة وهكذا ، بذلك تكون المسافة المقطوعة $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots$ وهى نفس المتسلسلة التى كانت لدينا من قبل بالطبع من المفروض عدم وجود أية قوة أخرى تؤثر على الجسم عدا مقاومة الهواء . كأن يكون الجسم مروحة محرك ، فعندما تكون متزنة تماما وغير متصلة بالآلة لا يكون هناك أية قوة تعمل على دورانها فإذا دفعت دفعة بسيطة تبدأ فى الدوران ولكن كما شرحنا ، تتلاشى حركتها تدريجياً

كانت العلاقة بين الجسم المتحرك والمتواليات الهندسية

معروفة قبلا فى القرن السابع عشر . إن مرور تيار الكهرباء فى سلك هو تطبيق آخر على نفس الموضوع : يصطدم الإلكترون المتحرك داخل السلك مع الذرات المكونة له ، تماما مثل رجل متحرك فى وسط حشد فإذا وصل السلك ببطارية كهربية ، تتغير الحالة : يكون هناك حينئذ قوة تدفع الإلكترون للأمام ، بنفس الطريقة تتعرض نقطة المطر الساقطة لقوة جذب الأرض لهذا السبب لا تتوقف عن حركتها كنتيجة لمقاومة الهواء . لذلك فإن الطريقة التى تسقط بها قطرة المطر أكثر تعقيداً بقليل ولكنها قد حلت هى أيضاً بواسطة متسلسلات هندسية فى القرن السابع عشر .

إذا كانت س «أى عدد» يمكننا أن نبين (كما فى الطريقة المستعملة فى مسألة البطاطس) أن المتسلسلة :

$$١ + س + س^٢ + س^٣ + ... \text{ تساوى } \frac{١}{١ - س}$$

بشرط ألا تكون س أكبر من الواحد .

سبق أن رأينا أنه يمكن التعبير عن $\frac{1}{1-س}$ فى صورة متسلسلة فى قوى س المختلفة . فى الحقيقة يمكن التعبير تقريباً عن كل دالة فى س بنفس الطريقة . فمثلا $\sqrt{1+س}$ تكافىء المتسلسلة $1 + \frac{1}{2}س + \frac{1}{8}س^2$ .... ، — $لو_{هـ}(1-س)$ تساوى المتسلسلة $س + \frac{1}{2}س^2 + \frac{1}{3}س^3 + \frac{1}{4}س^4$ ...... بفرض أن س أقل من الواحد فى كلا المتسلسلتين . من الواضح أن المتسلسلتين غير صحيحتين عندما تكون س أكبر من الواحد . بالطبع لم نبرهن تكافىء المتسلسلتين مع الدوال المذكورة : للبراهين يمكن الرجوع إلى الكتب المختصة .

إنه من المستحسن دائماً أن نعبر عن أى دالة فى صورة متسلسلة . مثلا نعلم من الباب الثانى عشر معنى لو ٢ ، ربما يكون من الصعب أن نعرف أى عدد هذا . لكن يمكننا معرفة ذلك بواسطة المتسلسلات حيث إنه يمكن الحصول على $لو_{هـ} ٢$ من $لو_{هـ} \frac{1}{2}$ كالآتى : $٢ \times \frac{1}{2} = ١$ بأخذ اللوغاريتمات ينتج أن :

لو$_{ه}$ ٢ + لو$_{ه}$ $\frac{١}{٢}$ = لو$_{ه}$ ١ ، وحيث إن لو$_{ه}$ ١ = ٠ .

لذلك ينتج أن — لو$_{ه}$ $\frac{١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٨}$ + $\frac{١}{٢٤}$ + $\frac{١}{٦٤}$ ......

تصغر حدود هذه المتسلسلة بسرعة كبيرة أى أنه لسنا فى حاجة أن نأخذ كثيراً من الحدود للحصول على قيمة لو$_{ه}$ ٢ المضبوطة .

ميزه أخرى لمثل هذه المتسلسلة هو أنه من السهل أن تفاضلها أو تكاملها ، حيث إننا نعرف هذا جيداً مع قوى س المختلفة . إذا فاضلنا المتسلسلة التى تكافئ لو$_{ه}$ (١ — س) ما هى المتسلسلة التى نحصل عليها ؟ هل هذه النتيجة معقولة ؟

فى آخر هذا الباب سوف نعبر عن ه^{س} فى صورة متسلسلة ، والآن نشرع فى إيجاد متسلسلة للدالة جتا س ، جا س لكى نبين كيفية طرق هذه المسائل .

بينا فى الباب الثالث عشر أن جا صفر = صفر ، جتا صفر = الواحد الصحيح ، وأيضاً أن $\frac{\text{دجا س}}{\text{د س}}$ = جتا س ،

$\frac{\text{ى جتا س}}{\text{ى س}}$ = ــ جا س . مما يدعو للعجب أن من مثل هذه المعلومات فقط يمكننا إيجاد المتسلسلة التي نريدها .

إذا عبرنا عن جتا س بمتسلسلة فى قوى س المختلفة فإنه سوف يكون هناك معاملات معينة للحدود المختلفة [كما كانت الأعداد ١ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ . . إلخ معاملات لحدود المتسلسلة ــ لو$_{\text{هـ}}$ (١ ــ س)]

سوف نسمى هذه المعاملات ا ، ب ، جـ ، و ، ز ، ح ، ط ، ى (لقد استبعدنا الحرفان ى ، هـ لأننا نستعمل ى بمعنى خاص فى $\frac{\text{ى ص}}{\text{ى س}}$ كما أن هـ لها معنى خاص أيضا) وبذلك تكون المتسلسلة :

جتا س = ا + ب س + حـ س^{٢} + و س^{٣} + ز س^{٤} + ح س^{٥} + ط س^{٦} + ى س^{٧} + ...

الآن نعين قيم ا ، ب ، حـ ...... إلخ .

يمكن إيجاد قيمة ا مباشرة . إذ بوضع س = . فى المتسلسلة نحصل على جتا صفر = ا أى ا = ١ .

إذا فاضلنا المعادلة السابقة نجد (حيث إن تفاضل جتا س هو ــ جا س) أن .

ــ جا س = ب + ٢ حـ س + ٣ و س^{٢} + ٤ ز س^{٣} + ٥ ح س^{٤} + ٦ ط س^{٥} + ٧ ى س^{٦} + ...

يمكننا الآن الحصول على ب بوضع س = صفر نحصل على جا صفر = ب أى ب = صفر تفاضل الآن متسلسلة . .

ــ جا س . تفاضل جا س هو جتا س وعلى ذلك فإن .

ــ جتا س = ٢حـ + ٦ وس + ١٢ زس^{٢} + ٢٠ ح ص^{٣} + ٣٠ ط س^{٤} + ٤٢ ى س^{٥} . . .

يمكن إيجاد حـ بنفس الطريقة تماماً بوضع س = صفر نحصل على المعادلة ــ ١ = ٢ حـ أى حـ = ــ $\frac{١}{٢}$.

من الواضح أنه لا يوجد شيء يمنعنا من الاستمرار فى هذه العملية إذا شئنا ويمكننا إيجاد قيمة أكبر عدد من و ، ز ، ح . . . يهمنا إيجاده .

والنتائج هى (يمكنك أن تتحقق منها بنفسك) .

ا = ١ ، ب = ٠ ، حـ = ــ $\frac{١}{٢}$ ، و = ٠ ، ز = $\frac{١}{٢٤}$ ، ح = ٠ ، ط = ــ $\frac{١}{٧٢٠}$ ، ى = ٠

لذلك فإن جتا س = ١ ــ $\frac{١}{٢}$س^{٢} + $\frac{١}{٢٤}$ س^{٤} ــ $\frac{١}{٧٢٠}$ س^{٦} . . .

القاعدة التى تعطى الأعداد ١ ، ٢ ، ٢٤ ، ٧٢٠ . إلخ هى الآتية . تبدأ بالعدد ١ ، نضرب هذا العدد فى ١ × ٢ ليعطى العدد الثانى ٢ . يضرب العدد الثانى فى ٣ × ٤ نحصل على العدد الثالث الذى نضربه مرة ثانية فى ٥ × ٦ يعطى العدد الرابع

وهكذا . إذا فاضلنا المتسلسلة السابقة نحصل على المتسلسلة التى تعطى جا س :

$$جا\ س = س - \frac{1}{٦} س^{٣} + \frac{1}{١٢٠} س^{٥} \ldots\ldots$$

تفيد هذه المتسلسلات فى عمليات الحساب إذ أن حدودها تصغر بسرعة كبيرة فتكفى الحدود القليلة الأولى منها لتعطى نتائج دقيقة للغاية . لذلك فإن هذه المتسلسلات تعتبر حلا للمسألة الموجودة فى الباب الثالث عشر وهى كيفية إيجاد طريقة لعمل جداول الجيوب وجيوب التمام بدون رسم أى شكل .

خطورة المتسلسلات

لعبت المتسلسلات دوراً هاماً فى الأيام الأولى لعلم التفاضل خصوصاً فى السنوات التى تلت عام ١٦٦٠ . كانت هذه فترة نشاط علمى عظيم : كان الناس مهتمين بالتقدم العلمى الجديد فواجهوا مجموعة كبيرة من المشاكل العلمية ، تركيب الساعات والتليسكوبات والخرائط والسفن . فإذا أعطت أية طريقة رياضية النتيجة الصحيحة لمسألة عملية لا يعبأ الناس كثيراً ما إذا كانت هذه الطريقة منطقية أم لا . وعند استخدام الكميات الصغيرة △ س ، اتبع علماء الرياضة الطريقة التى تناسبهم : فى لحظة

ما قالوا « إن △ س صغيرة جداً وسوف يكون من المناسب أن نعتبرها وكأنها مساوية للصفر » وبعد ذلك بقليل أرادوا أن يقسموا على △ س ولذا قالوا « إذا كانت △ س صفراً لا يمكننا القسمة عليها . سوف نفرض △ س صغيرة لكن لا تساوى الصفر تماماً » فرضوا صحة ما قد يناسبهم أكثر . وإذا اتضح لهم أى خطأ فى النتيجة عدلوا عما فرضوه . هذه الطريقة التجريبية نجحت تماماً حيث إن النتائج كانت دائماً تقارن بالواقع .

لقد عولجت المتسلسلات بهذه الطريقة أيضاً . فإذا بدأ من المعقول عمل خطوة معينة نفذت تلك الخطوة وإذا أعطت نتيجة غير معقولة استنتج الإنسان فى الحال أن هناك خطأ .

بعد حوالى ١٥٠ عاما كانت فيها الرياضة خالية من المشاكل بدأت الصعوبات فى الظهور . فمثلا فى حساب اللوغاريتمات نتعرض للمتسلسلة $١ - \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} - \frac{١}{٤} + \frac{١}{٥} - \frac{١}{٦} \cdots$ سوف نفرض أن ا هو مجموع النصف الموجب من هذه الحدود بحيث إن : $ا = ١ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٥} + \frac{١}{٧} \ldots$ وأن ب هو مجموع باقى الحدود فى المتسلسلة ، أى أن: $ب = \frac{١}{٢} + \frac{١}{٤} + \frac{١}{٨} \ldots$ نلاحظ أن كل حدود ب زوجية . إذا ضاعفنا ب فإننا بذلك نحصل على أن

$$٢ب = ١ + \frac{١}{٢} + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٤} + \cdots\cdots$$

لدينا فى المتسلسلة الأخيرة كل حدود ا بالإضافة إلى حدود

ب . لذلك فإن ٢ب = ١ + ب أى ١ = ب. لكن ب لا تساوى ١ لأن كل حد فى ١ أكبر من نظيره فى ب : ١ أكبر من $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ أكبر من $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ أكبر من $\frac{١}{٦}$ وهكذا . عندما ١ تساوى ب فإن متسلسلتنا الأصلية ١ − $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٣}$ − $\frac{١}{٤}$ . . . = ١ − ب = صفر ولكن مجموع المتسلسلة الأصلية هو فى الحقيقة أقل من ٧, بقليل .

هذا يعنى أنه بإجراء عمليات تبدو منطقية قد توصلنا لنتيجة غير صحيحة . من الناحية الأخرى ففى كثير من الحالات قد حصلنا باستعمال المتسلسلات على نتائج مفيدة وصحيحة لذلك كان من الطبيعى أن يبدأ علماء الرياضة فى البحث بعناية أكثر عن المعنى المضبوط للمتسلسلة ، وما هى العمليات بالضبط التى يمكن إجراؤها على المتسلسلات . فى خلال القرن التاسع عشر قام علماء الرياضة ببحث مثل هذا . وكان هناك رد فعل ناتج عما كان سائداً فى الأزمة السالفة . فانتشر جو من الاحتياط . أصبح علماء الرياضة أشبه ما يكونوا بالمحامين يهتمون كثيراً باستعمال الكلمات على الوجه الصحيح ، متشككين فى المناقشات التى تبدو فى ظاهرها « معقولة » كما استحدثت بعض كلمات مثل « التقارب » المنتظم ، لكى نميز بين المتسلسلات التى يمكن الاعتماد عليها عن تلك التى تؤدى إلى نتائج خاطئة .

ولم يستقص علماء الرياضة فقط عن منطق المتسلسلات ، بل

أصبحوا متشككين فى جميع الكلمات التى يستعملونها ، ولم يستريحوا حتى كانوا قد أعطوا تفسيرات صحيحة جداً لجميع التعبيرات التى استعملوها . أصبح فى المعتاد أن ترى كتب الرياضة الحديثة أطول بكثير من الكتب القديمة ، لأنها أصبحت تهتم بشرح وتحقيق الموضوعات التى كانت تبدو واضحة لأول وهلة .

هناك خرافة حول أم أربعة وأربعين التى سئلت عن الطريقة التى تحرك بها أرجلها فتحيرت من السؤال لدرجة أنها لم تتمكن من المشى بعد ذلك . عندما يبدأ الطلبة فى دراسة الرياضات الحديثة كثيراً ما يقاسون من إضطراب مماثل : إنهم يضيعون أوقاتاً كثيرة فى تعلم طريقة النقد لدرجة تجعلهم غير قادرين على الانتاج . أحسن منهاج هو أن نتتبع التاريخ : أولا نتعلم كيف نستخلص النتائج كما تمكن الباحثون القدامى أن يستخلصوها . وبعد ذلك فقط تفحص أضعف النقط فى الطريقة التى استخدمت لطرق الموضوع . إذا لم يكن هناك مخاطرة قام بها علماء الرياضة المبدعون فى القرنين السابع عشر والثامن عشر لما وجد علماء الرياضة فى القرن التاسع عشر شيئاً لكى ينتقدوه .

أصل $هـ^{س}$

تعطى كتب علمية كثيرة تفسيرات للعدد هـ وهى فى ذاتها ممتازة ومنطقية ولكنها تترك القارئ وهو شاعر أن كل شىء قد أنطلق « من الظلام » إن الموضوع منطاق ولكن كيف نشأ ؟ وعلى أى شىء هو ؟

لقد درسنا قبل دوالا مثل $١٠^{س}$ ، $ا^{س}$ ، $لو_{هـ}$ س . والآن سوف نحاول أن نجمع الحقائق عن هذه الدوال ونبين الارتباطات بينها .

تنشأ فكرة الدالة الأسية من عملية الإقراض . إن الطريقة التى بها يقفز الدين على فريسته ويخنقها قصة قديمة فى كل من الحقيقة والخيال . إذا عرض مرابى ١٠٠ جنيها لكى يرددها المدين ١١٠ جنيها فى ظرف شهر، وإذا لم يتمكن المدين فى ظرف شهر أن يدفع هذا المبلغ فإنه يجد نفسه مضطراً أن يعقد سلفة جديدة بنفس الشروط لشهر آخر ، مقدار السلفة الجديدة يكون ١١٠ جنيها وليس ١٠٠ جنيها . سوف يصبح الدين فى ظرف سنة أكثر من ٣١٣ جنيها . يزداد الدين لكل شهر تال بحيث يصبح ١ $\frac{١}{١٠}$ ضعف مقداره الأول . (قارن هذا مع كيف اكتشفت اللوغاريتمات

فى الباب السادس) ١٠ ٪ فى الشهر تعادل ٢١٣ ٪ فى السنة أكثر من ١٢ ضعف ١٠٪ .

يمكننا أن نعكس هذا ونتساءل . : ماهو السعر فى الشهر الذى يعادل ٥٪ فى السنة ؟ يمكننا أن نحاول أسعاراً مختلفة فى الشهر حتى نجد سعراً يعادل (لدرجة كافية من الدقة) ٥٪ فى السنة . ويمكننا أن نتساءل ما هو السعر فى الأسبوع ، ما هو السعر فى اليوم الذى يناظر ٥٪ فى السنة . وإذا شئنا يمكننا إيجاد السعر فى الساعة أو فى الدقيقة أو فى الثانية . هناك جواب واحد فقط صحيح لكل من هذه الأسئلة . عندما يتعين السعر فى السنة يتعين من تلقاء نفسه السعر لأى فترة أخرى من الزمن .

نفرض مثلا أن السعر لسنة كاملة كان ١٠٠٪ وتقاضى مراب غير خبير ٤٠٪ لستة أشهر . لذلك يكون من الأوفر أن نقترض لمدتين كل منها ستة أشهر بدلا من مدة سنة واحدة . إذ بذلك تصبح المائة جنيه بعد ستة شهور ٢٤٠ جنيهاً . وباعتبار هذا الدين وكأنه سلفة جديدة مقدارها ١٤٠ جنيها بسعر ٤٠٪ يكون ربح الستة أشهر الباقية ٥٦ جنيها ، وبذلك يصبح الدين ١٩٦ جنيها فى نهاية السنة كلها . أما إذا اقترضنا لمدة سنة فيجب دفع ٢٠٠ جنيها فى نهاية السنة . بنفس الطريقة إذا تعين السعر لستة أشهر وكان ٥٠٪ فإن ذلك يشجع الناس أن يقترضوا نقوداً

لمدة سنة ثم يقرضونها مرة أخرى لفترتين كل مقدارها ستة أشهر : بعد الستة أشهر الأولى تصبح المائة جنيه ١٥٠ جنيها وبعد الستة أشهر الثانية تصبح المائة والخمسون جنيها ٢٢٥ جنيها ، وبعد رد مبلغ المائتى جنيها يتبقى ربحا مقداره ٢٥ جنيها . بهذه الطريقة العملية يكون سعر ستة أشهر شيئاً ما أكبر من ٤٠٪ ولكنه أقل من ٥٠٪ .

يمكننا عمل جدول يبين ما يؤول إليه الجنيه الواحد بعد أية فترة من الزمن ، أسابيع ، أيام ، ساعات ، دقائق ، بمجرد معرفة السعر فى السنة . إذا أصبح الجنيه الواحد ا جنيها بعد سنة واحدة فإنه يصبح $ا^{ن}$ بعد ن سنة (ن عدد صحيح) . لذلك يكون من الطبيعى أن $ا^{\frac{1}{2}}$ ليس له معنى فى ذاته : فهناك كلمات كثيرة لها أكثر من معنى واحد . إنه مضيعة للوقت أن نناقش أيهما المعنى الصحيح . ترتبط الكلمة بالشىء الذى تدل عليه فالوردة بأى اسم آخر تعطى رائحة زكية . فإذا قلنا إن $ا^{\frac{1}{2}}$ جنيها هى ما يؤول إليه الجنيه الواحد بعد $\frac{1}{2}$ سنة تحت شروط معينة فلنا كل الحق فى ذلك (يتفق هذا التعريف مع ما قد أعطى فى الباب السادس ولو أنه بصورة مختلفة) تعنى $ا^{س}$ ما يئول إليها الجنيه الواحد بعد س سنة . ويجوز أن تكون س كسراً .

وكما رأينا فى الباب السادس فإن أنسب الطرق لعمل جدول هو أن نبدأ بإحداث تغير بسيط ثم ننتقل من هذا إلى إحداث تغيرات أكبر. إذا إزداد الجنيه الواحد بأى سعر فسوف يأتى الوقت الذى يزيد فيه بواحد من ألف وليكن فى ك سنة (يجوز أن تكون ك كسراً صغيراً). بعد كل ك سنة تمر يكون المبلغ المستحق $\frac{١}{١٠٠٠}$ ١ ضعف قيمته الحالية. بذلك يمكننا أن نرسم شكلا بيانياً يوضح طريقة ازدياد الدين وذلك برسم خطوط رأسية تبعد عن بعضها مسافة ك بوصة. يجب أن يكون كل خط رأسى أطول من الذى يسبقه بجزء من ألف وأن يكون الارتفاع المناظر إلى س = ٠، بوصة واحدة وذلك لأن المبلغ الذى نبدأ به جنيه واحد.

الأعداد السالبة

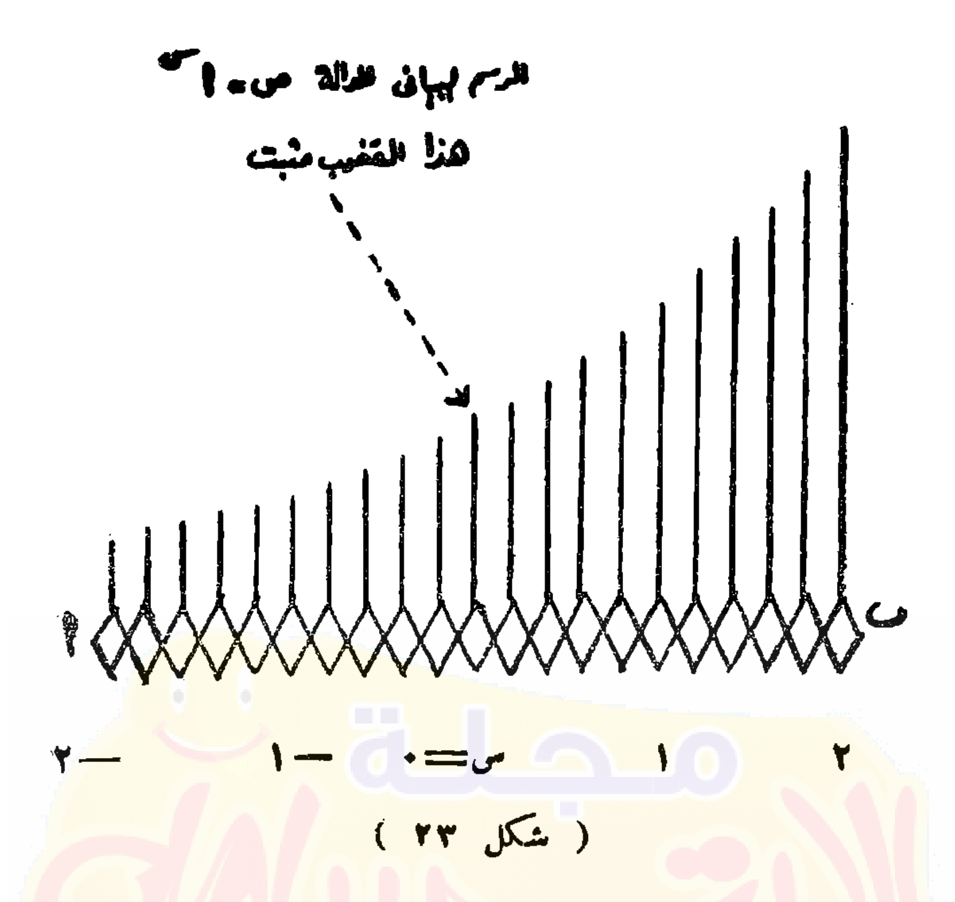
من الواضح أنه يمكن أن نمتد برسمنا البيانى إلى قيم س السالبة. إن طول كل خط رأسى يساوى $\frac{١٠٠٠}{١٠٠١}$ من طول الخط الذى على يمينه. وعلى بعد ك بوصة يسار س = . يمكننا أن نرسم خطاً رأسيا طوله $\frac{١٠٠٠}{١٠٠١}$ من البوصة. وبالاستمرار فى هذه العملية يمكننا أن نكمل الرسم البيانى وأن نجد ارتفاعاً مناظراً لأية مسافة على اليسار، أى لقيم س السالبة.

والآن يكون لدينا رسم بيانى ممتد إلى أى مدى نشاءه إلى كل من اليمين واليسار .

تغيير مقياس الرسم

تتوقف المسافة ك على السعر . وباختيار ك المناسبة يمكننا أن نحصل على أى سعر نرغبه . ويجب أن تبقى المسافات بين الخطوط الرأسية متساوية ولكن إذا غيرنا مقدارها فإننا نغير السعر . يمكن إجراء هذا آلياً بالجهاز المبين فى شكل ٢٣ بواسطة فتحات مشغولة فى شكل ماسات . نفرض أن هناك نموذجاً مصنوعاً لهذا بقطع من الخشب المتصلة ببعضها إتصالا خفيفاً . فإننا نحتاج إلى تدبير ما (غير مبين فى الشكل) ليحافظ على القضبان الرأسية فى الاتجاه الملائم . يمكن إبعاد القضبان الرأسية عن بعضها البعض أو ضغطها بالشد أو بالضغط عند النقطتين ا ، ب . بهذه الطريقة يكون لدينا نموذج واحد يمثل ا^س لأى عدد ا (فى مدى قيم معينة) .

(قد بولغ فى الشكل فى معدل التغير ، كل عصا رأسية هى فى الحقيقة واحد من عشرة أطوال من جارتها بدلا من واحد من ألف) . س مقاسة بالبوصات . وعند س = ١ ، ا^س = ا وبذلك



(شكل ٢٣)

يكون ا هو طول القضيب الموجود على بعد بوصة واحدة على يمين س = ٠ . فمثلا للحصول على الرسم البيانى للدالة $٢^{س}$ يجب ضغط النقطتين ا ، ب حتى يأتى القضيب الذى طوله ٢ بوصة أعلى التدريج ١ الموجود على محور س . عندما يأخذ النموذج هذا الوضع سوف نجد ، على بعد بوصة واحدة يمين أى قضيب قضيباً آخراً طوله الضعف .

سوف نسمى النموذج المرسوم فعلا ، أى الذى فيه طول كل قضيب $١\frac{١}{٢}$ من طول القضيب الذى يجاوره على اليسار ،

بالنموذج الغير المتقن : سوف نسمى النموذج المشروح هنا والذى فيه النسبة ١ ١/٢٠٠ بالنموذج الدقيق .

يكون النموذج الغير متقن مناسباً للصناعة وللدراسة المدرسية. يجب أن يبقى النموذج الدقيق فقط فى المخيلة . كما رأينا فى الباب السادس فإن النسبة ١,١ ليست قريبة قرباً كافياً من الوحدة لكى تعطى قيما دقيقة للوغاريتمات .

اللوغاريتمات

فى الباب السادس عرفنا اللوغاريتم بأنه « طول الحبل » الذى يحتاج إليه الفرد لمضاعفة قوته بعدد معين . تناظر المسافة س ، فى الرسم البيانى ، طول الحبل ، ويقيس ارتفاع القضيب القائم هناك (ص بوصة مثلا) ، التأثير المضاعف . إننا فى الحقيقة نستعمل فى النموذج الغيرالمتقن الأعداد المبينة فى الجدول الموجود فى «كيف كشفت اللوغارتيمات» . يمكن أن تتخذ ا = ١٠ للحصول على لوغاريتمات للأساس ١٠ ولكن ليس لنا الآن أى غرض فى العدد ١٠ ولنفرض أن النموذج مجهز لأى عدد ا . لذلك فإن

$$ص = ا^{س} \text{ أو } س = لو_{ا}\, ص$$

إذا كانت ص = ا^{س} فما هى صَ ؟ اعتبر هذا مع النموذج الدقيق الذى فى مخيلتك . كلما انتقلنا من قضيب إلى الذى يليه تزداد س بمقدار ك أى أن △ س = ك وحيث إن طول كل قضيب يساوى ١,٠٠١ من طول القضيب الذى على يساره لذلك تكون الزيادة فى الطول ، △ ص = ٠,٠٠١ ص ومن ثم فإن :

$\frac{\triangle ص}{\triangle س} = \frac{٠,٠٠١}{ك}$ ص . وهذه تعطينا فكرة عن صَ : إنها توحى (وهذا فعلا حقيقى) أن صَ تتناسب مع ص . إذا أخذنا ك = ٠,٠٠١ فإننا نحصل على نتيجة بسيطة : $\frac{٠,٠٠١}{ك}$ ص سوف تساوى فقط ص . وبذلك فإن صَ = ص تقريباً .

(لأن $\frac{\triangle ص}{\triangle س}$ تساوى تقريباً صَ عندما △ س = ٠,٠٠١)

إننا نعنى باتخاذ ك = ٠,٠٠١ أن القضبان تبعد عن بعضها بمقدار واحد من ألف من البوصة . من س = صفر إلى س = ١ يكون طول القضيب الرأسى قد ضرب فى ١,٠٠١ ألف مرة . لذلك يكون طول القضيب عند س = ١ مساويا (١,٠٠١)^{١٠٠٠}

إذا استبدلنا النموذج الدقيق الذى قد درسناه بالنموذج الغير المتقن لكنا قد توصلنا إلى النتيجة $(1\frac{1}{10})^{10}$: يعطى النموذج الدقيق النتيجة الأحسن ، $(1\frac{1}{1000})^{1000}$ ومع ذلك إذا اتخذنا عدداً أكثر من القضبان يمكننا أن نحصل على نتائج أحسن .

سوف تكون نتيجتنا دائما فى الصورة $(1 + \frac{1}{ن})$. وكلما كبرت ن اقتربت صَ من ص . عندما تصبح ن كبيرة جداً يزداد اقتراب $(1 + \frac{1}{ن})^{ن}$ من العدد ٢٫٧١٨٢٨٠٠٠٠ الذى ذكرناه فى الباب الحادى عشر وسميناه هـ . إذا كانت ص = $هـ^{س}$ فإن صَ = ص تماماً .

فى الباب الحادى عشر أوجدنا هـ بطريقة أخرى ، وذلك باختيار ا لكى تعطى أبسط النتائج عندما نفاضل لوغاريتم للأساس ا . وحيث إن ص = $ا^{س}$ هى نفس الشيء مثل س = $لو_{ا}$ ص فليس غريبا أن يعطى نفس العدد هـ أبسط النتائج فى كلتا الحالتين . ربما يتمكن القارىء أن يبين أن الطريقتين هما حقيقة نفس الشيء . نشأ الاختلاف الوحيد نتيجة وضع س بدلا من ص . فرضنا فى الباب الحادى عشر أن ص = $لو_{ا}$ س وهنا س = $لو_{ا}$ ص .

متسلسلة $هـ^س$

لدينا الآن بيانات عن $هـ^س$ تكفي لإيجاد متسلستها عند س = ٠ ، $هـ^س = ١$ ، وإذا كانت ص = $هـ^س$ فإن صَ = $هـ^س$ إن الطريقة التي استعملت لإيجاد متسلسلة الدالة جتا س تنفع تماماً مع $هـ^س$. سوف نجد أن :

$$هـ^س = ١ + س + \frac{١}{٢} س^٢ + \frac{١}{٦} س^٣ +$$

$$\frac{١}{٢٤} س^٤ + \frac{١}{١٢٠} س^٥ + \frac{١}{٧٢٠} س^٦ + \ldots\ldots$$

فاضل هذه المتسلسلة لنفسك وتحقق أن متسلسلة صَ هي نفسها متسلسلة ص وبذلك فإن صَ = ص .

يمكن أيضاً تطبيق هذه الطريقة ، التي ترتبط بأسماء تيلور ومكلورين على دوال أخرى كثيرة .

للدالة $أ^س$ خواص بسيطة مشتركة مع الدالة $هـ^س$. وذلك لأنه كما رأينا يمكن استنتاج الرسم البياني للدالة $أ^س$ من الرسم البياني للدالة $هـ^س$ فقط بتغير مقياس رسم س (بدفع أو سحب النقطتين ا ، ب الموجودتين في النموذج) .

تطبيقات على $هـ^{س}$

إن أهمية $هـ^{س}$ ترجع إلى الخاصة $صَ = ص$ أى أن معدل ازديادها يساوى مقدارها ولذا أخذنا $هـ^{ب س}$ بدلا من $هـ^{س}$ حيث ب أى عدد معين فإن $صَ = ب ص$ ، أى أن معدل الزيادة يتناسب مع قيمة الدالة نفسها .

هناك أشياء كثيرة تتزايد بهذه الطريقة سبق أن ذكرنا مثالا عن عملية الربا التى تربح بها الألف جنيه ١٠٠٠ ضعف ما يربحه الجنيه الواحد .

كثيراً مايحدث نفس الشىء فى الأعمال التجارية فكلما ازداد عدد المحال التجارية التى تملكها شركة ازدادت مقدرتها على إنماء عملها .

إذا رغبت بلدة فى تنمية صناعاتها وبدأت بالقليل من الأجهزة فإنك تجد أن المعدل الذى تقيم به مصانع جديدة بطىء للغاية ، ولكن إذا ما زاد ما لديها من المصانع زادت إمكانياتها فى تجهيز مصانع جديدة . العكس صحيح مع بلدة تعانى من الإحتلال الأجنبى إذ كلما خسرت البلدة مصانعها قلت إمكانياتها فى تعويض ما تخسره .

يزداد تعداد بلدة ، تحت الظروف العادية ، طبقاً للقانون $هـ^{س}$. فكلما زاد عدد الأهالى فى البلدة ازداد عدد الأطفال المحتمل ولادتهم . إن تعداد الولايات المتحدة الأمريكية ما بين عام ١٩٧٠ وعام ١٨٩٠ كان يعطى تقريباً طبقاً للقانون : $ص = ٣,٩ \times ١٠^{٠,٠١٢ س}$ حيث ص هو التعداد بالملايين ، س عدد السنين بعد عام ١٧٩٠ [1] . يبطل بالطبع العمل بالقانون عندما تصل البلدة إلى المرحلة التى فيها لا يمكنها إعالة أية زيادة فى الأهالى . هناك اعتبارات مشابهة يمكن تطبيقها على المعدل الذى تتكاثر به المكروبات فى زجاجة لبن أصابه الفساد . كما يطبق مع انتشار الأرانب فى أستراليا ومع صور أخرى للتكاثر .

هناك أيضاً حالات يتبع فيها انتشار ديانة جديدة أو مذهب سياسى قانون الدالة الأسية . فإذا كان هناك عدد كبير من الأهالى فى حالة تسمح لهم بقبول تعاليم جديدة بمجرد عرضها عليهم فان انتشار تلك التعاليم يعتمد إلى حد كبير على عدد الرجال والنساء الذى يقومون بدور المبشرين لها . فاذا كان صاحب الرسالة فى عزلة فلا يمكن أن يؤثر إلا على هؤلاء الذين فى منطقته ، ومع كل مهتد إلى الدين تزداد قدرته على إسماع نفسه . إنه من

---

(١) مقدمة للرياضيات مؤلفه كولى ، جانز ، كلين وهلرت ص ٣٦٣ .

الممكن أن نذكر حالات تبين فيها الاحصائيات أن حركة ما قد اتبعت قانون الدالة الأسية فى أثناء نموها بالطبع مع بعض التغييرات الطفيفة الناتجة عن أسباب أخرى وأحداث خاصة ساعدت أو عرقلت الحركة . إن نمو حركة بهذه الطريقة فى فترة معينة لا تخبرنا بشىء بالمرة عن آمالها المستقبلة . ربما تحطمها زعامة فاسدة ، أو استيقاظ لعناصر مضادة ، أو قوة أعلى ، أو مجرد سوء حظ . عندما تحقق الأحداث قانوناً رياضياً فهذا يعنى أنه كان هناك بعض العوامل المؤثرة فى فترة معينة : وكلما تعددت العوامل المتسببة ازداد الرسم البيانى للحركة تعقيداً .

يمكن تطبيق الدالة الأسية على الموضوعات البعيدة عن التعقيدات الموجودة فى حياة الإنسان أو الحيوان . فكثر استعمالها فى العلوم المتصلة بعالم الجماد كما فى إيجاد سرعة جسم متحرك ضد مقاومة الهواء ، أو ضغط الهواء على ارتفاعات مختلفة ، أو ذبذبات دائرة كهربائية ، أو مرور التيار فى دائرة كهربائية أو تلاشى الذبذبات . فى هذه وفى مسائل أخرى لا حصر لها ، تزداد بعض الكميات أو تقل بمعدل مناسب مع مقدارها . حقيقة أنه جدير بالملاحظة مقدار ما يمكن وصفه فى عالم الطبيعيات ، وهو خاص بعوامل متناقضة لمجموعة كبيرة من القوى الغير المرتبطة ، بواسطة أبسط الدوال الرياضية ، $س^ن$ ، $هـ^س$.

الباب الخامس عشر

الجذر التربيعي لناقص واحد

« الرأى السائد عن الرياضة أنه يجب عليك أن تعرف السبب أولا ثم تعرج إلى التطبيق ، وهذا كلام لا أساس له ، فإنى أعرف من العمليات الرياضية ما استخدمته بنجاح زمنا طويلا دون أن أفهم أو يفهم غيرى مدلولها المنطقى ، لقد تعودت على هذه العمليات وفهمتها على هذا الوضع » .

« أولفر هفيسايد »

فى نهاية الباب الخامس لاحظنا أن مربع كل عدد كانت إشارته موجبة ولم نجد عدداً مربعه — ١ . وكان من الطبيعى أن يتوقع الإنسان انتهاء الموضوع عند هذا الحد، وأن يعترف علماء الرياضة أن أية مسألة تؤدى إلى المعادلة س^{٢} = ١ — ليس لها معنى ولا حل .

لكن حدث شىء عجيب . فمن وقت لآخر لاحظ علماء الرياضة أنه يمكن اختصار العمل كثيراً مع الحصول على الإجابة الصحيحة إذا استخدموا الرمز ت، حيث ت^{٢} = — ١ ، واعتبروا

ت فى جميع الحالات الأخرى تماماً كأى عدد طبيعى . نفذ هذا لأول مرة حوالى عام ١٥٧٢ وكان هناك شك كبير فى هذه الطريقة التى استمرت فى إعطاء نتائج صحيحة . لم يعرف أحد سبباً لذلك لكن الرمز ت قد برهن أنه مفيد لدرجة أن علماء الرياضة استعملوه لمدة قرنين بدون أن يحقق لهم غير النجاح .

وفى عام ١٨٠٠ لم يعرف أى معنى منطقى للرمز ت (نجد القصة بأكملها فى عدد دانزج ، لغة العلم) .

إذا سمحنا فى الوقت الحاضر واعتبرنا ت كعدد طبيعى فإنه يمكننا معرفة نوع النتائج التى حصل عليها علماء الرياضة فى القرن الثامن عشر .

فى الباب الرابع عشر وجدنا متسلسلات لكل من الدوال $هـ^{س}$ ، جتا س ، جا س ربما قد لاحظت تشابه المعاملات التى ظهرت فى هذه المتسلسلات فى الحقيقة إذا اعتبرنا متسلسلة $هـ^{س}$.

$$١ + س + \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{٦} س^{٣} + \frac{١}{٢٤} س^{٤} + \frac{١}{١٢٠} س^{٥} + \frac{١}{٧٢٠} س^{٦} + \dots$$

وإذا كتبنا حداً منها وتركنا الآخر فإننا نحصل على :

$$١ + \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{٢٤} س^{٤} + \frac{١}{٧٢٠} س^{٦} + \dots\dots$$

فإذا جعلنا الإشارات على الترتيب + ثم — ، فإننا نحصل على

متسلسلة جتا س . بنفس الطريقة فإن جا س تناظر النصف الآخر من الحدود .

وباستعمال الرمز ت يمكننا أن نرى العلاقة بين الثلاث متسلسلات فى قانون واحد .

دعنا نفرض أن س أخذت القيمة ت ا حيث ا أى عدد بوضع س = ت ا فى متسلسلة $هـ^{س}$ نحصل على .

$$هـ^{ت ا} = ١ + ت ا + \frac{١}{٢} ت^{٢} ا^{٢} + \frac{١}{٦} ت^{٣} ا^{٣} + \frac{١}{٢٤} ت^{٤} ا^{٤} \ldots\ldots$$

حيث إن $ت^{٢} = -١$ ، $ت^{٣} = ت ت^{٢} = -ت$ ، $ت^{٤} = ت^{٢} \times ت^{٢} = (-١)(-١) = ١$ فإن كل قوى ت التالية تئول بالترتيب إلى ١ ، ت ، −١ ، −ت . وعلى ذلك فإن $هـ^{ت ا} = ١ + ت ا - \frac{١}{٢} ا^{٢} - \frac{١}{٦} ت ا^{٣} + \frac{١}{٢٤} ا^{٤} \ldots$

فإذا فرزنا الحدود التى فيها ت من الخالية من ت ، نجد أن الحدود الخالية من ت تعطى متسلسلة جتا ا بينما الحدود التى فيها ت تساوى ت من المرات متسلسلة جا ا . بالإختصار :

$$هـ^{ت ا} = جتا ا + ت جا ا .$$

هذه فى الحقيقة نتيجة مفاجئة من دالة بسيطة مثل $هـ^{س}$.

إننا نجد دوال من هذا النوع فى مقرر الحساب فى أثناء دراسة الربح المركب . يقع العدد هـ بين ٢ ، ٣ وهو حوالى ٢٫٧ .

تختلف جتا ا عن جا ا اختلافاً تاماً . أول ما تقابلهما تجدهما مرتبطتين فى الهندسة كأضلاع فى مثلث قائم الزاوية . ليس لدينا أى سبب بالمرة يجعلنا نتوقع ارتباطهما بقانون جبرى بسيط : فى الحقيقة يغمض على معظم الناس الطريقة التى حسبت بها جداول جا ا .

تبين الصيغة السابقة أن للكميتين جتا ا ، جا ا صلة وثيقة جداً مع أبسط أنواع الدوال . للدالة $\text{هـ}^{\text{س}}$ خواص بسيطة كثيرة، فمثلا $\text{هـ}^{\text{ق}} . \text{هـ}^{\text{ك}} = \text{هـ}^{\text{ق}+\text{ك}}$ حيث ق ، ك أى عددين . إذا أخذنا ق = ت ا ، ك = ت ب فإننا نحصل على النتائج الآتية .

$$\text{هـ}^{\text{ت ا}}\ \text{هـ}^{\text{ت ب}} = \text{هـ}^{\text{ت}(\text{ا}+\text{ب})} .$$

أى أن :

$$(\text{جتا ا} + \text{ت جا ا})\ (\text{جتا ب} + \text{ت جا ب})$$
$$= \text{جتا}\ (\text{ا} + \text{ب}) + \text{ت جا}\ (\text{ا} + \text{ب})$$

بمساواة الحدين الخاليين من ت فى كلا الطرفين نحصل على أن :

$$\text{جتا}\ (\text{ا} + \text{ب}) = \text{جتا ا جتا ب} - \text{جا ا جا ب}$$

وبمساواة معامل ت فى كلا الطرفين نحصل على :

جا (ا + ب) = جا ا جتا ب + جتا ا جا ب

يمكن الحصول من خواص هـ^س على جميع قوانين الجيوب وجيوب التمام الموجودة فى حساب المثلثات بدون جهد كبير . وباستعمال هذه الطريقة يمكن تخفيف العبء على الذاكرة فبدلا من أن يحفظ الإنسان قوانين يمكن أن يستخدمها وقتما يحتاج إليها باستعمال هـ^ت ا .

من السهل أن نوجد القوانين التى تعطى جتا ا ، جا ا بدلالة هـ^ت ا فى الحقيقة جتا ا = $\frac{1}{2}$ (هـ^ت ا + هـ^-ت ا) وبذلك يمكننا تحويل أية مسألة على جيوب التمام إلى مسألة على دوال أسية . فمثلا يمكننا بهذه الطريقة أن نوجد $\int$ جتا س ء س لأنه من السهل تكامل الدال الأسية .

يمكن اعتبار كل المسائل التى على الجيوب وجيوب التمام وكأنها مسائل على الدوال الأسية . بذلك نوفر على أنفسنا مجهود استذكار طرق خاصة لإيجاد الجيوب وجيوب التمام . ومن ثم فإن ت وسيلة ذات فائدة عظمى وكما ذكر فى الباب الخامس ، كثيراً ما يستعملها المهندسون الكهربائيون .

ما هى ت

يبدو غريباً لأول وهلة أن يكون الجذر التربيعى لناقص واحد ، وهو شىء لم يره أحد قط ويبدو فى ذاته أنه مستحيل ، مفيداً إلى هذا الحد : فى تصميم المولدات والمحركات الكهربائية ، الإضاءة الكهربائية وأجهزة اللاسلكى .

عندما تصدمنا حقيقة ما عادية وتبدو كشىء غريب فهذا يعنى أننا ننظر إليها من وجهة نظر خاطئة . إذا وجدنا أن الكون غامض فلأن فكرتنا عنه ليست صحيحة ، وحينئذ نفاجأ عندما نجد أنه شىء آخر مختلف تمام الاختلاف . الخطأ ناتج عن فكرتنا الأصلية لا من الكون .

عندما نجد أن ت غامضة فلأننا نعتبرها عدداً طبيعياً ولكننا قد اقتنعنا فى الباب الخامس أنه لا يوجد العدد س يحقق العلاقة $س^2 = -1$.

أيضاً قد رأينا أن الرمز ت الذى يحقق العلاقة $ت^2 = -1$ يؤدى إلى نتائج صحيحة للغاية وذات معنى واضح . إنه من المستحيل أن تكون ت عدداً وليس هناك أى تناقض بالمرة إذا فرضنا ت شيئاً ما آخر . وفى الحقيقة يمكن اعتبارها كمؤثر .

تعنى أية عملية إجراء عمل ما : اقلب البيانو رأساً على عقب . تحرك خطوتين لليمين « اطرد مستر جونز » هى أمثلة لعمليات على البيانو وعلى جندى وعلى مستر جونز . إذا استعملنا ى كاختصار للعملية « اقلب رأسا على عقب » ، ق للبيانو يكون للعملية ى ق نفس معنى الجملة الأولى المعطاة سابقاً . ى تسمى مؤثر . يمكن تكرار العملية فتعنى ى ى ق اقلب البيانو رأساً على عقب ثم أقلبه رأساً على عقب مرة أخرى ، وهذا يعنى ارجع البيانو لوضعه الأصلى . فى المعتاد يرمز إلى ى ى بالرمز $ى^{٢}$ ، إلى ى ى ى بالرمز $ى^{٣}$. إلخ حيث إن قلب البيانو رأساً على عقب مرتين يتركه فى وضعه الأصلى ، فإن ى ى ق = ق أى $ى^{٢}$ق = ق. ومن المناسب . أن نستعمل الرمز I للعملية التى تترك الشىء كما هو. على ذلك فإن I ق تعنى نتيجة ترك البيانو كما هو أى فى موضعه الأصلى ق ولذلك $ى^{٢}$ ق = I ق . هذا النوع من العمليات ليس فقط صحيحاً للبيانو ، أنما ينطبق على أى جسم صلب آخر (بالطبع لا ينطبق على كوب به ماء) . يعبر عن هذا بالمعادلة

$ى^{٢}$ = ١

سوف ترى أنه الممكن تماماً أن نناقش العمليات ، وأن نحصل على نتائج عنها ، وأن نتحقق من صحتها بمنطق سليم بحت ، سوف ترى أيضاً أن هذه النتائج عند كتابتها برموز الجبر المختصرة

تشبه المعادلات العددية ويمكن بسهولة أن تتخذ خطأ على أنها بيانات عن الأعداد . فى الحقيقة إنه هذا الخطأ هو بالذات الذى وقعنا فيه فيما يختص بالمعادلة ت٢ = — ١ . لتجنب أى سوء فهم من هذا النوع سوف نطبع كل الرموز التى تمثل العمليات بحروف كبيرة من الآن فصاعد . سوف نكتب **ت** بدلا من ت لكى نفرق بين الرمز والعدد . وبالرغم من أن المؤثرات ليست أعداداً لكن كثيراً ما تكون مرتبطة بالأعداد . فى الآلة الحاسبة مثلا لدينا عدداً من العجلات المسننة المركبة بنفس الطريقة الموجودة فى عدادات العربات . وفى كل مرة تقطع العربة ميلا تدور العجلة الممثلة للوحدات تقسيماً واحداً ، وذلك يضيف وحدة للمسافة المقطوعة. دوران العجلة عملية وهذه العملية تناظر إضافة وحدة المسافة المقطوعة ، وبسبب التناظر بين الأعداد والعمليات الميكانيكية الخاصة أصبح من الممكن صناعة الآلات الحاسبة .

سوف نبحث الآن عن مجموعة من المؤثرات ١ ، ٢ ، ٣ ، . . + التى تناظر عن قرب ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . + فى الحساب العادى . ١ ، ٢ ، ٣ . . . ليست اعداداً ولكن هناك علاقات كثيرة بين هذه المؤثرات تناظر تلك التى بين الأعداد الطبيعية ، لها أنموذج مشترك مع الأعداد الطبيعية تماماً كالأنموذج المشترك بين أسرة من أب وابن وابنة فى مستعمرة قرود ، وأسرة من أب

وأم وابن وابنة فى برمنجهام هذا لا يعنى أن فى برمنجهام كل فرد قرد .

سوف نجد أنه من الطبيعى تماماً أن ندخل العملية ت بحيث يكون $ت^٢ = -١$

المؤثرات ١ ، ٢ ، ٣

لكى نعرف المؤثرات ١ ، ٢ ، ٣ . . . نتخيل عصا طويلة مدرجة من الخشب وأن و أية نقطة ثابتة موضوع على يمينها الأرقام ١ ، ٢ ، ٣ إلخ على أبعاد ١ ، ٢ ، ٣ بوصة . أما على يسارها فنضع الأرقام -١ ، -٢ ، -٣ إلخ على أبعاد ١ ، ٢ ، ٣ بوصة . هذا تدريج عادى كالذى يوجد على أى ترمومتر .

ثبت أحد طرفى سلك عند و بحيث تنزلق عليه خرزة ا . يمكن للسلك أن يشير إما لليمين وإما لليسار . تتكون العمليات التى سوف نعتبرها إما من إدارة السلك من إتجاه إلى الآخر وإما من إنزلاق الخرزة ا على طول السلك .

يمكن الآن تعريف العملية ٢ . إنها تتكون من حركة الخرزة ا إلى نقطة على السلك على بعد من و يساوى ضعف بعدها الأول عن و . يمكن وصف العملية ٢ فى كلمات « ضاعف المسافة و ا »

بنفس الطريقة تعنى العملية ٣ « ضاعف و ا إلى ثلاثة أمثال » تعنى $٢\frac{٧}{٨}$ ، « ضاعف و ا $٢\frac{٧}{٨}$ من المرات » ، تعنى س « ضاعف و ا س من المرات ، حيث س أى عدد موجب تعنى ١ « اترك ا فى مكانها » .

يمكن إجراء عدة عمليات متوالية ، مثلا تعنى العملية (٤) (٣) (٢) مضاعفة الطول و ا ثم زيادته إلى ثلاثة أمثال ثم بعد ذلك إلى أربعة أمثاله . وباختصار يجب زيادة و ا إلى أربعة وعشرين ضعفا من طوله الأصلى . تكافىء الثلاث عمليات على التوالى العملية (٢٤) .

(٤) (٣) (٢) = ٢٤ .

لذلك فإن هناك تناظراً كبيراً بين إجراء عمليات متعددة متوالية وبين عملية ضرب الأعداد الطبيعية . ويمكننا أن نقول إن للعمليات نفس جدول ضرب الأعداد الطبيعية .

تفهم من العملية – ١ أن إتجاه السلك قد عكس ولكن المسافة و ا لم تتغير . وبذلك إذا كانت ا أصلا فوق الرقم ٣ ، سوف تتسبب العملية – ١ فى نقلها إلى الرقم – ٣ . وإذا كانت ا أصلا فوق الرقم – ٣ ، تنقلها العملية – ١ إلى ٣ .

تفهم بالعملية ، – س أن المسافة و ا قد تضاعفت س من المرات فى الاتجاه العكسى .

حقق بنفسك أن (— ٢) (٣) = (— ٦) ، (— ٤) (— ٥) = ٢٠ • تماثل قواعد ضرب المؤثرات + ، — قواعد ضرب الأعداد الطبيعية .

الجمع

كيف نجد معنى ٢ + ٣ أو ٢ + (— ٣) ؟ يمكننا أن نقول مباشرة إن ٢ + ٣ هى ٥ وإن ٢ + (— ٣) هى — ١ . أى أنه يمكننا استعمال الحساب العادى كطريقة لتعريف جمع المؤثرات ولكن هذه سوف تعوقنا . عند إعتبار العدد ت الذى لا يناظره أى عدد طبيعى ، سوف لا نعرف كيف نتخذ ١ + ت .

لذلك كان من الأوفق أن نبحث عن طريقة أخرى تنطبق على العمليات مثل ت وفى نفس الوقت لا تتعارض مع الطريقة الأولى للمؤثرات التى تناظر الأعداد الطبيعية .

نفرض أن الخرزة ا كانت فى البداية عند النقطة ق وأن ك هى النقطة التى تنتقل اليها ا بعد العملية ٢ ، ر هى النقطة التى تنتقل إليها ا بعد العملية ٣ ، س هى النقطة التى تنتقل اليها ا بعد العملية ٥ . وبذلك فإن و ك = ٢• وق ، ور = ٣• وق ، وس = ٥• وق (وق هى المسافة من و إلى ق ، ٢، ٣، ٥ هى الأعداد

الطبيعية : لا يوجد مؤثرات فى هذه المعادلات) . من الواضح أن وس = وك + ور بحيث إنه يمكننا إيجاد موضع س بوضع الطولين وك ، ور على إستقامة واحدة .

بنفس الطريقة يمكننا معرفة تأثير العملية ٢ + (– ٢) . يجب أن نذكر أنه سوف تتسبب ٢ ، – ٣ فى جعل و ا يتجه فى اتجاهين مختلفين : عندما نضع الطولين على استقامة واحدة يجب أن يكون اتجاه الطول الثانى مضاد للأول .

يساعد شكل ٢٤ فى توضيح هذه العمليات .

(شكل ٢٤)

ونتيجة لذلك سوف نتجه لتعريف الجمع كالآتى . إذا نقلت العملية س النقطة ا من ق إلى ك ، ونقلت العملية ص النقطة ا من ق إلى ر ، فإن س + ص هى العملية التى تنقل ا الى ع حيث ع هى النقطة التى نحصل عليها بوضع وك ، وق على استقامة واحدة .

يمكننا إختصار ٢ + (— ٣ ، في الصورة ٢ — ٣ . كما يجب التمييز بين ٢ — ٣ ، (٢) (— ٣) . تعني (٢) (—٣) أنه يجب تطبيق العملية ٢ على نتيجة تأثير —٣ على ا .

لقد توصلنا الآن إلى مجموعة من المؤثرات التي تناظر الأعداد الطبيعية : يمكن ضربها وجمعها مع تشابه النتائج المناظرة للأعداد الطبيعية فقط تبدو بخط بارز . فإذا انتزعنا صفحة فيها حسابات تتعلق بهذه المؤثرات فلربما تخطى ونعتبرها نماذج على مبادئ الحساب كتبت بفرد ما ضغط بشدة على القلم : ليس هناك أية طريقة للتمييز بين الإثنين .

المؤثر ت

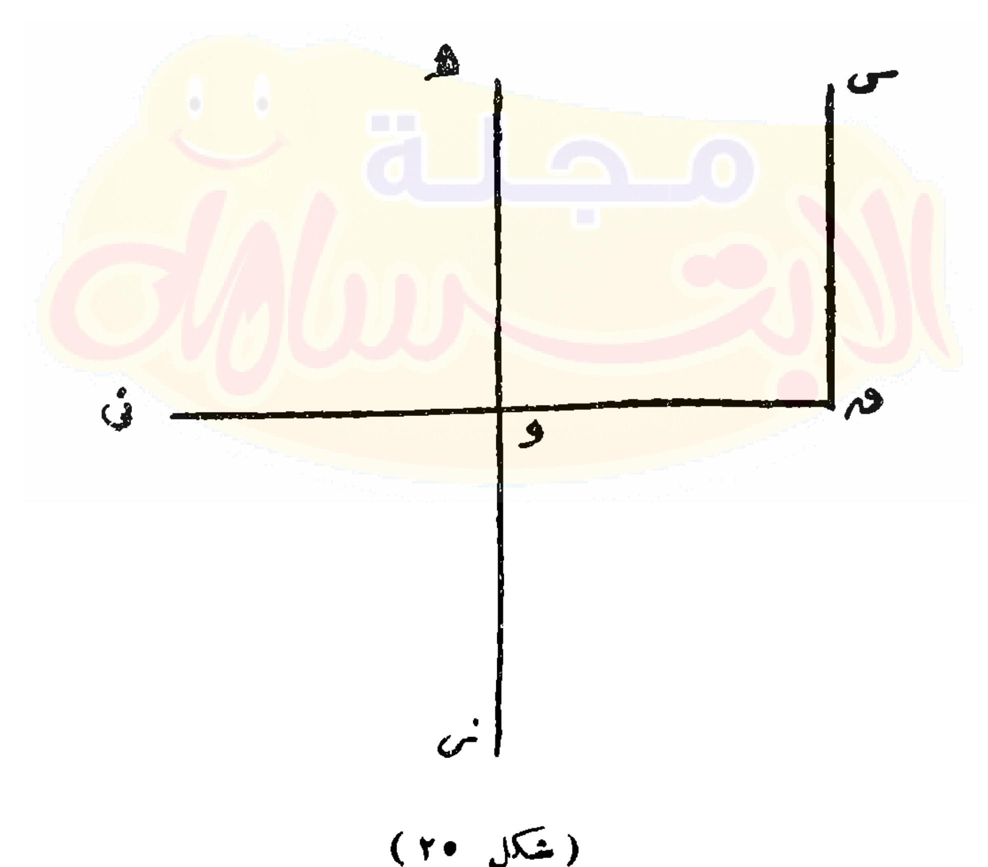
تعكس العملية — ١ اتجاه و ا ، بدون أى تغيير في طوله ، أى أنها تدير و ا بزاوية ١٨٠° . هل يمكننا إيجاد عملية ت بحيث يكون ت٢ = — ١ ؟

تعني ت٢ أن العملية ت قد أجريت مرتين . يتطلب السؤال أن نجد عملية ما إذا أجريت مرتين تديرو ا بمقدار ١٨٠° .

السؤال الآن في غاية السهولة . تتركب العملية الغامضة ت من دوران و ا بزاوية ٩٠° ، في شكل ٢٥ فرضنا أن ا كانت في

البداية عند ق . تنقل العملية ت ، ا إلى هـ . تنقل ت٢ ، ا إلى ف تنقل ت٣ ، ا إلى ز ، ترجع ت٤، امرة أخرى إلى ق. تنقل – ١ امن ق إلى ف وبذلك فان ت٢ = – ١ كما توقعنا .

قبل أن نتعرض إلى ت كانت الخرزات تتحرك على خط مستقيم وكان من الممكن أن تقع على يمين أو يسار ، ولكن دائما فى نفس المستوى .



(شكل ٢٠)

والآن وقد أدخلنا ت فإنه من الممكن للنقطة ا أن تقع أعلى أو أسفل و . وفى الحقيقة سوف يكون أن تتحرك ا على مسطح الورقة بأجمعه .

الجمع

الآن يمكن استعمال طريقة الجمع « على استقامة واحدة » لتعطى معنى للكميات مثل ١ + ت ، ٢ + ٣ ت

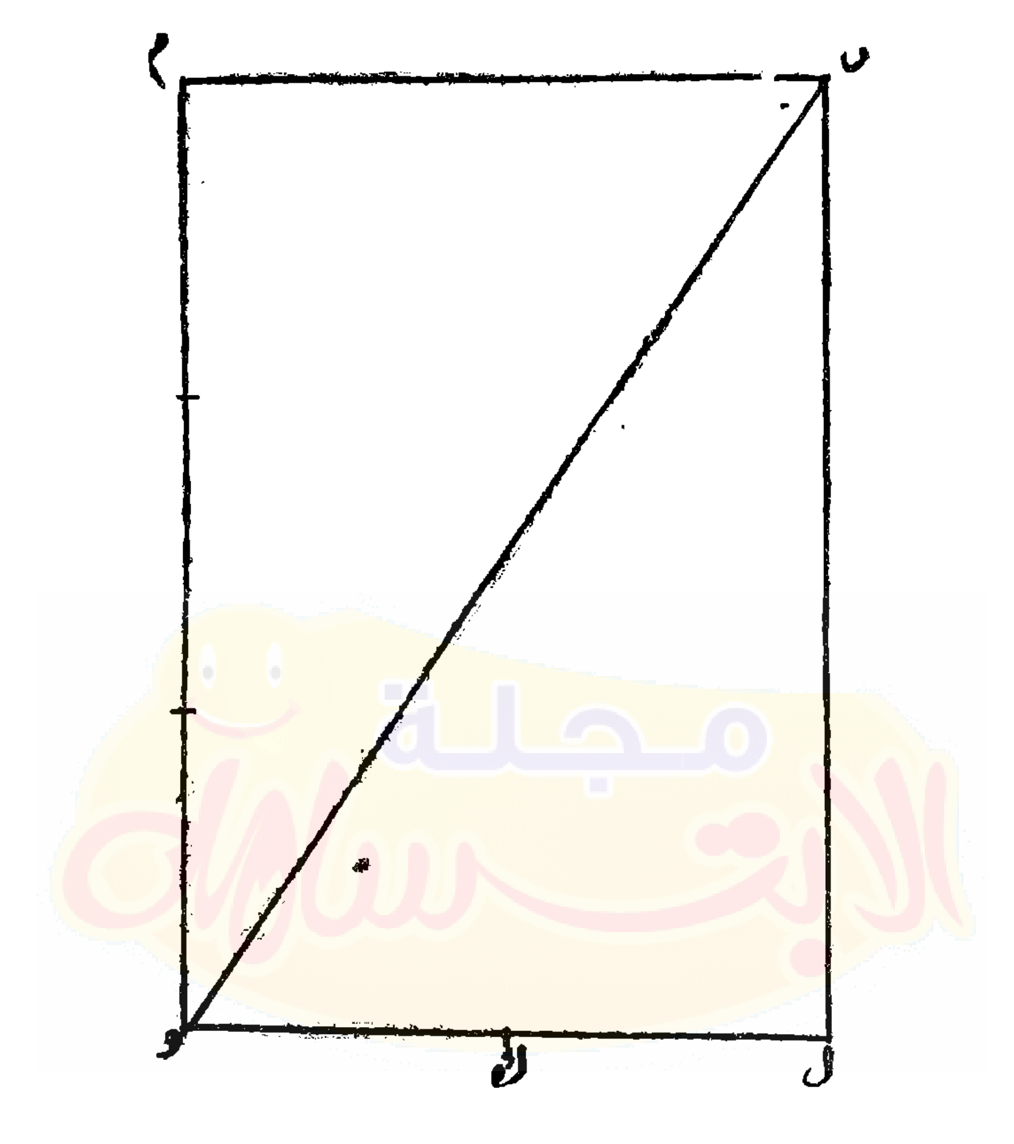
نفرض كما سبق أن الخرزة ا كانت عند ق ثم أثرنا عليها بالعملية ١ + ت (ش ٢٥). فإلى أين تتحرك ؟ علينا إيجاد النقطة ك ، ر التى تنقل ا إليها بواسطة ١ ، ت ثم نضع و ك ، ور على استقامة واحدة تترك العملية ١ ا عند ق وتنقل العملية ت ا إلى ه . وبذلك تكون ك هى ق ، ر هى ه .

علينا وضع وق ، وه على استقامة واحدة . عند ق ترسم ق س مساويا و ه وله نفس الاتجاه مثل و ه . هذا يعطينا النقطة س التى نريدها . تنقل العملية ١ + ت ا من ق إلى س . ولو بدأت ا من أية نقطة أخرى يمكننا معرفة المكان الذى تنقلها إليه العملية ١ + ت (مثلا إذا بدأت الخرزة عند ه فإلى أين تنتقل بها ١ + ت ؟).

يمكن بنفس الطريقة دراسة العملية ٢ + ٣ ت . ويمكن للخرزة ا أن تبدأ من أية نقطة على الصفحة مثلا ك (ش ٢٦) . علينا بدراسة العمليتين ٢ ، ٣ ت على انفصال ثم ربطهما سويا بطريقة الجمع « على استقامة واحدة » .

تنقل العملية ٢ ا من ك إلى ل . وعندما تؤثر ٣ ت على ا فإنها تدير و ا بزاوية ٩٠° مع زيادته إلى ثلاثة أمثال طوله . وبذلك تنقل ٣ت ا من ك إلى م . والآن يجب وضع و م عند نهاية و ل . نرسم ل ن مساويا وم وفى نفس اتجاه وم . تكون ن هى النقطة المطلوبة تنقل العملية ٢ + ٣ ت ا من ك إلى ن . يمكننا اختيار ك فى أى مكان . وباختيار ك فى مواضع مختلفة يمكن ملاحظة أماكن ن المناظرة . ربما تلاحظ أن الزاوية ك و ن لا تتغير أبداً وأن نسبة و ن إلى و ك ثابتة لا تتغير مع موضع ك . بمعنى آخر مهما كان موضع الخزرة ا تدير العملية ٢ + ٣ ت و ا بنفس الزاوية وتضاعف طوله نفس عدد المرات .

يمكننا أن نتصور أية عملية ا + ب ت وكأنها عملية دوران بزاوية معينة يتبعها زيادة فى الطول . إذا كانت ا + ب ت تناظر دوران بزاوية مقدارها θ وزياد فى الطول بمقدار رمن المرات . فإنه يكون من السهل استنتاج أن ا = ر جتا θ ؛ ب = رحا θ فإذا كان لدينا ا ، ب يمكننا إيجاد ر ، θ بيانيا و ذلك برسم مثلث



(شكل ٢٦)

قائم الزاوية فيه ا ، ب ضلعان · تسمى ر بالمقياس ⊖ ؛ بسعة العملية ا + ب ت . لقد أعطيت هاتين الكميتين أسماء خاصة إذ أنها كثيراً ما تأتى فى القوانين : وبذلك نوفر وقتا ليس بقليل.

والآن أنت فى حالة تسمح لك أن تفكر بنفسك فى هذه العمليات . لقد أوضحنا بالأمثلة ١ + ت ، ٢ + ٣ ت وطريقة الحصول على أية عملية تمثلها الصورة أ بِ + ت . والآن أنت تفهم معنى هذه الرموز ومتروك لك أن تمارس بنفسك إجراء مثل هذه العمليات . ماذا تفهم بالعمليات ١ + ٢ ت، ١ — ٣ ت إذا أجريت عمليتين متتاليتين هل يؤثر الترتيب الذى تجرى به هاتين العمليتين ؟ هل (٢) (ت) هى نفسها (ت) (٢) ؟ هل (١ + ت) (١+٢ ت) هى نفسها: (١ + ٢ت) (١ + ت). بالأجراء الفعلى للعمليات الهندسية أوجد عملية واحدة لها نفس النتيجة مثل (١ + ٢ ت) (١ + ت) ماهو مقياس ت؟ مقياس ٣ + ٤ ت ؟هل (ت) (ت) = (— ت) (— ت) ما هو (ت) (— ت) ؟

تعنى (— ت) العملية (—) (ت)

بمجرد إعطائنا معنى محددا للرموز فإننا نفقد كل السيطرة عليها يمكننا أن نقرر الاسم الذى نعطيه لأية عملية ، و لكن بمجرد اختيار الاسم علينا أن نلاحظ ما يفعله ذلك المؤثر . لقد وصلنا

هذه المرحلة إذا أعطينا الأسماء ١ ، ٢ ، ٣ ... ، ت لمؤثرات خاصة وشرحنا ما نعنيه عندما نكتب مؤثرين متجاورين أو مرطبين بالإشارات + ، — . تعني القسمة العملية العكسية للضرب. الرمز الوحيد الذى لم يعط بعد أى معنى $هـ^{س}$ الذى سوف نرجع له مستقبلا . ولكن قد استقر الأمر على كل شيء يختص بالجمع والطرح أو الضرب والقسمة . ويجب ألا نفترض أن هذه الرموز الجديدة تتبع نفس قواعد الأعداد الطبيعية : لأنها ليست أعدادا طبيعية وعلينا أن نجرب لنرى ما إذا كانت أم لا .

مثلا يجب ألا نفترض أن (٢) (ت) هى نفسها (ت) (٢) . حقيقة إن (٢) (ت) تساوى (ت) (٢) ولكن يجب أن نحاول ذلك بالتجربة . هناك مؤثرات تتغير نتيجتها تبعاً للترتيب الذى تحدث به . إن التأثير الناتج من الضرب على الجسم ثم على الرأس يختلف عن التأثير الناتج من الضرب على الرأس ثم على الجسم .

الشيء الذى يهمنا فى المؤثرات التى نحن نصدرها الآن هو أنها تتبع قوانين الأعداد الطبيعية . إذا كان أى قانون صحيحاً مع الأعداد الطبيعية فإنه سوف يكون صحيحاً مع هذه المؤثرات. مثلا (س + ١) (س — ١) = $س^{٢}$ — ١ حيث س عدد طبيعى

إذا استبدلنا س بأى مؤثر أ + ب نجد أن النتيجة لا تزال صحيحة . فمثلا بوضع ت مكان س فإن (ت + ١) (ت — ١) = ت^{٢} — ١ ، تكون صحيحة . لكن ت^{٢} = — ١ لذلك ت^{٢} — ١ = — ٢ سوف نجد أن نتيجة إجراء العمليتين ت — ١ ، ت + ١ على الترتيب هى مضاعفة الطول و ١ وإدارته بزاوية ١٨٠° أى نفس إجراء العملية — ٢ .

سوف تجد أيضاً أنه ليس من المهم الترتيب الذى نجرى به عمليات الضرب أو الترتيب الذى نجمع به الرموز ت ٢ ، ٢ ت لهما تماماً نفس المعنى (نعنى بالضرب إجراء العمليات واحدة بعد الأخرى) ت + ١ لها نفس المعنى مثل ١ + ت (إنه ليس من المهم أن خطا يوضع عند نهاية الآخر عند الجمع على استقامة واحدة .

باختصار أية قاعدة صحيحة مع الأعدادالطبيعية تكون صحيحة مع هذه المؤثرات . هذه حقيقة تناسبنا جداً . عندما نبدأفى دراسة نوع جديد من العمليات كثيراً ما تقابلنا قوانين لم نرها من قبل . كل فرع من نوع العمليات له طريقته الخاصة التى يتبعها وعلينا

أن نعتاد عليها . ولكننا لسنا مضطرين لدراسة أية قوعد جديدة للمؤاثرات ا + ب ت . إنها تتبع تماما قوانين الأعداد الطبيعية : وبالرغم من أنها فى الحقيقة ليست اعداداً ، فهى تشترك فى الكثير معها لدرجة يمكن اعتبارها فى معظم الأغراض أعداداً . يسميها علماء الرياضة فى المعتاد الأعداد المركبة ليبينوا أنها على صلة وثيقة بالأعداد الطبيعية : إذا . اعتبرت ت فى حساباتك عدداً طبيعياً فسوف تحصل على نتائج صحيحة .

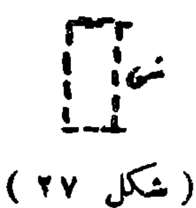
من الناحية الأخرى باعتبار ت مؤثراً ، كثيرا ما يمكنك الحصول على نتائجك بسرعة أكبر مما إذا استعملت الطرق العادية فى الحساب . مثلا قد يطلب منك حل المعادلة $س^{٢} = ت$ إننا نعلم أن ت تمثل دورانا بزاوية قائمة والآن نتساءل ما هى العملية س التى إذا أجريت مرتين يكون لها نفس التأثير مثل ت ؟ الجواب واضح . اصنع زاوية مقدارها ٤٥° . هذه العملية لا تشمل أى زيادة فى الطول أى أن المقياس ر = ١ (إذا لم يوجد هناك زيادة فى الطول فهذا لا يعنى أن ر = ٠ . إننا نضرب الطول و ا فى ر . إذا لم يتغير طول و ا فهذا يعنى أن ر = ١) وحيث إن الزاوية θ تساوى ٤٥° فمن السهل أن نرى أن العددين ا ، ب يجب أن يكونا ٠٫٧٠٧ ، ٠٫٧٠٧ (من جدول الجيوب وجيوب التمام) وتكون العملية ا + ب ت التى تمثل دوران

مقداره ٤٥° هى ٧٠٧, + ٧٠٧,ت (هذه عملية تقريبية فقط. ارسم الشكل بنفسك وتحقق من النتيجة بالحساب العادى معتبراً ت وكأنها أى عدد طبيعى).

الأعداد المركبة والكهربائيون

إنه من السهل الآن أن نرى السبب الذى من أجله يستعمل الكهربائيون المؤثر ت هذا الاستعمال الكثير . يحتوى كل مولد كهربائى على أجزاء تدور فى كل دقيقة بعدد كبير من الزوايا القائمة — أى تطبق العملية ت عليها مرات عديدة .





(شكل ٢٧)

سوف يكون من الممكن والمفيد لطلبة الكهرباء أن نوضح ت كلية بواسطة مولد بسيط للتيار المتغير . وللسهولة يكون من

المستحسن أن نعتبر تصميم المولد مختلفاً تماماً عن ذلك الذى يستعمل حقيقة فى الأعمال الهندسية .

نفترض دوران ملف صغير فى مجال مغناطيسى . فيمكن تمثيل اتجاه المجال المغناطيسى بواسطة سهم ، وقوة المجال المغناطيسى بطول هذا السهم . فى شكل ٢٧ ، يمثل السهم و ا المجال المغناطيسى يحل السهم و ا محل الخط ا (الذى كان يصل النقطة الثابتة بالخرزة ا) . يعنى دوران و ا تغير اتجاه المجال المغناطيسى . وتعنى إطالة و ا زيادة قوة المجال . يمكن إجراء كلتا العمليتين بسهولة إذا أمكن توليد المجال المغناطيسى بوسائل كهربائية .

يمكننا إتخاذ وضعاً قياسيا عند ما يكون التيار الذى يسرى فى المغناطيسات الكهربائية عند ف ، ه مقداره أمبير واحد . تعنى العملية ا أن التيار فى المغناطيس الكهربائى قد زاد حتى أصبح المجال المغناطيسى عند المركز نترك مسافة قبل وبعد و أقوى ا من المرات عما سبق .

سوف تعنى العملية ب ت أننا بدأنا من الوضع القاسى وضاعفنا قوة المجال القياسية ب من المرات ثم صنعنا دورانا بمقدر زاوية قائمة . تكون حينئذ الملفات فى المواضع المبينة بخطوط متقطعة عند ح ، ز ويكون المجال المغناطيسى ممثلا بالسهم المتقطع .

يمكن تفسير العملية ا + ب ت وذلك بإدماج العمليتين .

الديناملفان عند هـ ، ف يسرى فيهما تيار كاف لتوليد مجال مغناطيسى مقداره ا من الوحدات عند و وفى نفس الوقت لدينا ملفان عند ح ، ز يمر بهما تيار كاف لتوليد مجال مقداره ب من الوحدات عند المركز. سوف يولد التأثير المزدوج مجالا مغناطيسيا فى اتجاه يقع بين الاتجاهين و ف ، و ح . كما سبق يتعين الوضع الصحيح للسهم الممثل للتأثير المزدوج تماما بنفس قاعدة « الجمع على استقامة واحدة » التى تعرف عادة بقاعدة متوازى الأضـــلاع أو مثلث القوى .

وسوف يكون من الواضح للكهربائيين أنه يمكن توجيه السهم الممثل للمجال المغناطيسى لأى اتجاه مرغوب فيه باختيار مناسب لمقدار (واتجاه) التيارات فى الدائرتين هـ ــ ف ، ح ــ ز . أى أنه إذا تكونت أية عملية من ، دوران وزيادة فى الطول فانه يمكن وضعها فى الصورة ا + ب ت .

ولتجنب التعقيد لم نرسم الملف الصغير الذى يدور حول و . وبالطبع سوف تنتج أية تغيرات فى قوة أو اتجاه المجال المغناطيسى تغييرات مناظرة فى الطول وسعة التيار المتردد المتولد . ومن الطبيعى أن يستعمل المؤثر ت مرتبطاً مع التيارات المترددة ليبين التغيرات الناتجة من المقاومات الإضافية ، الحث . . . . الخ .

باستعمال الرمز ت يمكننا أن نقارن تأثير التغيرات التى

تحدث داخل الدائرة مع تأثير تغيرات معينة (ممثلة برموز مثل ا + ب ت) تجرى فى داخل المولد الذى ينتج التيار .

الدراسات التالية للرموز ت

قد أثير فى هذا الفصل سؤال واحد ولم يجاب عليه بعد، وهو كيفية تعريف $هـ^{س}$ عندما تكون س عددا مركبا . $هـ^{س}$، فى خط بارز هى رمز العملية جديدة ويمكننا (إذا شئنا) إلحاقه بأية عملية مهما كانت . ولكن هذا سوف يكون مضللا للغاية . إذ يجب علينا دائما أن نتذكر أن العملية التى وقع الاختيار عليها ليس لها أدنى علاقة مع $هـ^{س}$ العادية ، وربما نكون دائما معرضين للوقوع فى خطأ بنسيان هذا الفرق . لذلك يكون من المستحسن ألا نستعمل $هـ^{س}$ بالمرة مالم نجد عملية أخرى لها خواص كثيرة الشبهة بخواص $هـ^{س}$.

لقد وجدنا قبلا عمليات رمز لها بالمؤثرات س ، $س^{٢}$، $س^{٣}$... إلخ ونحن نعلم أنه يمكن التعبيرة عن $هـ^{س}$ بواسطة متسلسلة تحوى قوى س المختلفة . لذلك كان من الطبيعى أن تكون المتسلسلة المناظرة بحروف بارزة وان نعرف $هـ^{س}$ كالآتى :

$$هـ^{س} = ١ + \frac{١}{٢} س^{٢} + \frac{١}{٦} س^{٣} + \frac{١}{٢٤} س^{٤} + \frac{١}{١٢٠} س^{٥} ..$$

وفى الحقيقة أن هذا التعريف يكفى جداً لتوضيح معنى $هـ^{س}$ التى يمكن أن نبرهن بها جميع خواص $هـ^{س}$ العادية .

إنه من المهم أن نفهم مضمون هذا التعريف . فمثلا إذا رغبنا فى إيجاد $هـ^{٢+٣ت}$ بواسطة هذه المتسلسلة علينا أن نضع $٢ + ٣ت$ بدلا من س فنحصل على :

$$هـ^{٢+٣ت} = ١ + (٢ + ٣ت) + \frac{١}{٢}(٢ + ٣ت)^{٢} + \frac{١}{٦}(٢ + ٣ت)^{٣} + \cdots\cdots$$

إلخ وعلينا حينئذ أن نحسب $(٢ + ٣ت)^{٢}$ ، $(٢ + ٣ت)^{٣}$ . . إلخ ونضع بدلا منها ما يساويها $(٢ + ٣ت)^{٢}$ تساوى $- ٥ + ١٢ت$ ، $(٢ + ٣ت)^{٣}$ هى $- ٤٦ + ٩ت$ وهكذا إذا أخذنا فى الاعتبار الأعداد $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٦}$ . . إلخ الذى تظهر فى المتسلسلة فإننا نحصل على :

$$هـ^{٢+٣ت} = ١ + (٢ + ٣ت) + (-٢\frac{١}{٢} + ٦ت) + (-٧\frac{٢}{٣} + ١\frac{١}{٢}ت) + \cdots\cdots$$

والآن يمكننا أن نجمع هذه الحدود التى تحتوى ت وتلك الخالية من ت بحيث تكون :

$$هـ^{٢+٣ت} = ١ + ٢ - ٢\frac{١}{٢} - ٧\frac{٢}{٣} + \cdots\cdots$$
$$+ ت(٣ + ٦ + ١\frac{١}{٢}) + \cdots$$

يمكن تبرير هذه الخطوة لأنه يمكن معاملة ت تماماً كمعاملة س فى الجبر العادى كما ذكرنا سابقاً .

ولـكن هذه النتيجة سوف تـكون بدون جدوى مالم تئول كل من المتسلسلتين ١ + ٢ − ٢ $\frac{١}{٢}$ − ٢ $\frac{٢}{٣}$٧ . . . . . ، ٣ + ٦ + ١ $\frac{١}{٢}$ . . . . إلى نهاية محدودة عند ما تأخذ عدداً كافياً من الحدود وأيضاً سوف تـكون هذه المتسلسلات بدون أدنى فائدة إذا اتضح أنها متسلسلات خطرة « من النوع الذى شرح فى الباب الرابع عشر » .

فى الحقيقة إن هاتين المتسلستين معلومتان ويمكن الاعتماد عليهما . تحتوى الحدود الأخيره فى متسلسلة $هـ^{س}$ على أعداد مثل $\frac{١}{٢٤}$ ، $\frac{١}{١٢٠}$ ، $\frac{١}{٧٢٠}$ التى تصغر بسرعة كبيرة ، وعند درجة معينة لا تغير الحدود الأخيرة كثيراً فى مجموع المتسلسلة . تتكون الأعداد الموجودة فى $هـ^{س}$ بالقاعدة الآتية :

٦ = ١ × ٢ × ٣ ، ٢٤ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ وهكذا. ١٢٠ هى ٥ أضعاف ٢٤ ، ٧٢٠ هى ٦ أضعاف ١٢٠ ، وتصغر حدود المتسلسلة بعد ذلك بسرعة كبيرة .

ويمكن البرهنة على أن متسلسلة $هـ^{س}$ صحيحة (باللغة العلمية متقاربة) لجميع قيم س أى أنه إذا كانت س = ا + ب ت فإن

قيمة ا ، ب لا تؤثر فى تقارب المتسلسلات . فإذا كانت قيمة كل من ا، ب كبيرة يكون من الضرورى أن نأخذ عدداً كبيراً من الحدود قبل أن نحصل على قيمة $هـ^{ا+بت}$: وبالرغم من ذلك فحيث إن المتسلسلة تعرف $هـ^{س}$ جيداً فلدينا أساس صحيح يمكن الاعتماد عليه .

فى الحقيقة لإيجاد $هـ^{ا+بت}$ يكون من المستحسن أن نبدأ كالآتى :

$$هـ^{ا+بت} = هـ^{ا} هـ^{بت} = هـ^{ا} (جتا ب + ت جا ب).$$

ا ، ب تناظر الأعداد الطبيعية ا ، ب . يمكن الكشف عن قيمة $هـ^{ا}$ ، وجتا ب ، وجا ب من الجداول . لكن هذه الطريقة تكون ممكنة فقط بعد إثبات (بواسطة متسلسلة $هـ^{س}$) جميع خواص $هـ^{س}$. حتى يمكن تبرير جميع الخطوات التى قد اتخذت سابقاً . إذا كان تعريف $هـ^{س}$ بواسطة هذه المتسلسلة غير دقيق ، فلا يمكن لنا أن نطمئن على النتائج التى حصلنا عليها بهذا التعريف .

لذلك اضطر علماء الرياضة أن يدرسوا تقارب المتسلسلات التى تظهر فيها الأعداد المركبة . فدرسوا أيضاً المعانى التى يمكن إلحاقها إلى $\frac{ءص}{ءس}$ عندما تكون س ، ص أعداداً مركبة .

لقد رأينا مثلا أن استعمال ت يسمح لنا أن نبدى الصلة الوثيقة بين هـ^س ، جا س ، جتا س ، صلة غير متوقعة إذا أن هـ^س تبدو لأول وهلة أنها مختلفة تماماً عن جا س ، جتا س . ولقد رأينا أيضا أن هذه الصلة ذات فائدة عملية إذ أنها تساعدنا على حل مسائل كثيرة مرتبطة بالجيوب وجيوب التمام .

بنفس الطريقة تلقى الدراسات الأخرى للأعداد المركبة ضوءا على كثير من المسائل المرتبطة بالأعداد الطبيعية . فى الحقيقة أن موضوع الأعداد المركبة لهو أحد المواضيع اللطيفة والمفيدة فى الرياضيات . إنه يعطى الفرد الشعور بأنه قد أخذ إلى ما وراء الكواليس : بحيث يستطيع الفرد أن يرى بسهولة وبسرعة الأسباب التى أدت للنتائج التى كانت تبدو قبلا أنها مجرد صدفة . إنه موضوع يلعب فيه الحساب دورا صغيرا : كثيرا ما تأخذ نتائجه صورا يمكن للفرد أن يراها ويتذكرها كما يتذكر إعلانا أخاذا . ولأنه يمكن للفرد من رؤية الأهمية الخفية لكثير من المسائل العملية لذلك كان ذا فائدة عظمى لعلماء الرياضة التطبيقية .

لا يمكن لأحد أن يتنبأ أن دراسة ت سوف توصل إلى نتائج مبشرة كهذه . تماماً كما لم يتمكن الرجال الأولون الذين كان لديهم المغناطيسات والحديد أن يتنبأوا بتطبيقات نظرية

الكهرومغناطيسية التي أدت إلى اختراع اللاسلكي . هذا ما حدث فعلا في كلتا الحالتين .

عندما نتعلم في البداية كيفية استعمال ت سوف نحس بشعور غريب . وسوف يبدو لك أن الموضوع خيالي · هذا لا يمكن مفادانه إذ أن أي موضوع جديد يبدو غريباً لأول مرة . عندما أصبح المذياع شعبياً شعر الناس بأنه شيء غريب . ولكن الأطفال في هذه الأيام يعتبرون المذياع وكأنه شيء عادي — فاذا كنا مثلا في حالة حرب ومن باب الاقتصاد أوقفت جميع أجهزة اللاسلكي سوف يشعر الناس بأن عدم وجود المذياع شيء غريب . ولكن لم يكن لدى أحد مذياع عام ١٩١٤ — ١٩١٨ ولم يشعر أحد أن هذا غريباً . لا يوجد شيء لا بالغريب أو بالمألوف في ذاته . أي شيء يكون غريبا عندما تقابله لأول مرة : وأي شيء يكون مألوفا إذا عرفته لمدة طويلة . وكلما استعملت ت اقتربت من الشعور بأن ت شيء طبيعي معقول . ولكن هذا الشعور يأتي فقط بالتدريج .

تظهر الأعداد المركبة الرياضة البحتة في أحسن صورة . والرياضة البحتة هي دراسة طريقة . فاذا كان لدينا أية مسألة فإننا نريد معرفة أحسن الوسائل لطرقها . تبدو مسائل كثيرة أنها صعبة

لأول وهلة ثم تصبح بسيطة فقط إذا نظر الفرد إليها من الزاوية المناسبة وتمكن من فحصها وهى فى الوضع المناسب .

إنها مهمة علماء الرياضة البحتة أن يميزوا بين المسائل وأن يقترحوا أن هذه المسألة فى جوهرها مشابهة لتلك ، ولذا يكون من المحتمل محاولتها بطريقة خاصة . ربما يكون ارتباط المسائل ببعضها غير واضح .

فليس من الواضح بالمرة أن تلق المعادلة س^{٢} = −١ ضوءا على مسألة الإضاءة الكهربائية . كلما قل وضوح الارتباط زاد الفضل لعلماء الرياضة البحتة فى اكتشافه ، وكلما بدأت المسألة صعبة زاد الفضل عند توضيح ارتباطها بمسألة أخرى أبسط منها .

لا يحتاج المهندسون لمعرفة أكثر من النتائج الأولية جداً عن الأعداد المركبة . إن النتائج الأكثر تعمقاً لهى فى غاية الأهمية لعلماء الرياضة المتخصصين الذين يخترعون ويكملون الطرق الجديدة التى عندما تنتهى يمكن أن يستعملها العلماء والرجال العلميين. يجب على أى فرد له ذوق للرياضيات أن يحاول وهو صغير السن على قدر الإمكان أن يكتسب بعض المعلومات عن نظرية الأعداد المركبة . تحمل الكتب التى تعالج هذا الموضوع عناوين مثل « نظرية المتغيرات المركبة » ، نظرية الدوال إلخ . يعجز التلاميذ

مراراً كثيرة فى المدارس أن يتبينوا أن هناك رياضيات كثيرة يمكن معرفتها ، ويجد التلاميذ الموهوبون أنفسهم متفوقون على زملائهم فيظنون أنهم قد تمكنوا من الرياضيات . ونتيجة لذلك تجدهم لا يستفيدون بأى شىء فى عامهم الدراسى الأخير . ذلك لأنهم فى عامهم الأول بالجامعة (لهؤلاء الذين يتمكنوا من الإلتحاق بها فعلا) يقابلون أحسن التلاميذ الوافدين من المدارس الأخرى ، وحينئذ تواجههم صدمة هائلة .




مـجـلـة
** معرفتي **
www.ibtesama.com
منتديات مجلة الإبتسامة

فهرس


دار
القومية العربية
للطباعة والنشر والإنتاج

دار سعد مصر
للطباعة والنشر

أصدرت من مشروع الألف كتاب

دار القومية العربية للطباعة
١٦ شارع النزهة (ميدان الجيش


GREAT IS OUR GOD
حصريات مجلة الابتسامة
WWW.IBTESAMA.COM
مجلة الابتسامة